

Théorème 1 $(p \rightarrow q) \rightarrow r \Rightarrow p \rightarrow (q \rightarrow r)$.

Preuve. Tel que vu en cours, on a:

$$\begin{aligned} (p \rightarrow q) \rightarrow r &\equiv (\bar{p} \vee q) \rightarrow r \\ &\equiv (p \wedge \bar{q}) \vee r \\ &\equiv r \vee (p \wedge \bar{q}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p \rightarrow (q \rightarrow r) &\equiv \bar{p} \vee (q \rightarrow r) \\ &\equiv \bar{p} \vee (\bar{q} \vee r) \\ &\equiv r \vee \bar{p} \vee \bar{q} \end{aligned}$$

On en déduit:

$$\begin{aligned} ((p \rightarrow q) \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r)) &\equiv [r \vee (p \wedge \bar{q})] \rightarrow [r \vee \bar{p} \vee \bar{q}] \\ &\equiv [\bar{r} \wedge (\bar{p} \vee q)] \vee [r \vee \bar{p} \vee \bar{q}] \\ &\equiv [r \vee \bar{p} \vee \bar{q}] \vee [\bar{r} \wedge (\bar{p} \vee q)] \quad (\text{commutativité}) \\ &\equiv (r \vee \bar{p} \vee \bar{q} \vee \bar{r}) \wedge (r \vee \bar{p} \vee \bar{q} \vee \bar{p} \vee q) \quad (\text{distributivité}) \\ &\equiv (\mathbf{V} \vee \bar{p} \vee \bar{q}) \wedge (\mathbf{V} \vee \bar{p} \vee \bar{q}) \\ &\equiv \mathbf{V} \quad (\text{tautologie}). \end{aligned}$$

Dans ce qui précède, on a utilisé principalement les lois de de Morgan ainsi que la distributivité. Noter que $\mathbf{V} \vee p \equiv \mathbf{V}$ et $p \vee \bar{p} = \mathbf{V}$ quelle que soit p .

Théorème 2 *L'ensemble d'opérateurs $\{\neg, \wedge\}$ est complet.*

Preuve. On a vu en cours comment, à partir d'une table de vérité, obtenir la forme normale disjonctive d'une proposition, qui n'implique que les opérateurs \neg , \wedge et \vee . On en déduit que l'ensemble $\{\neg, \wedge, \vee\}$ est complet. Pour démontrer le théorème, il suffit de montrer qu'il est possible de créer une disjonction \vee à partir des opérateurs \neg et \wedge :

$$p \vee q \equiv \overline{\bar{p} \wedge \bar{q}} \quad .$$