IFT 3512: DEVOIR 1 **Patrice Marcotte**

À remettre à la démonstration du 1er février 2000

1 **(10 points)**

Soit f une fonction d'une seule variable. Comment déterminer, à partir des dérivées successives de f, si un point est un minimum local? Examiner tous les cas possibles. (Les dérivées successives peuvent être nulles !)

2 **(15 points)**

Déterminer les points stationnaires des fonctions

$$\text{(i)} \qquad \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - 2x^2 - 4x$$

$$\text{(ii)} \qquad -x_1 + x_1 x_2^3 - 3x_2.$$

ainsi que leur nature respective.

3 **(10 points)**

Soit f une fonction de $A \subseteq \mathbb{R}^n$ dans $B \subseteq \mathbb{R}$ et g une fonction monotone (croissante ou décroissante) de B dans $\mathbb{R}$. Prouver que si $g \circ f$ possède un optimum (minimum ou maximum) local en x^0 alors f possède également un optimum local en x^0. La réciproque est-elle vraie ?

4 **(10 points)**

Soit $\{x^i\}$ un ensemble de n points dans $\mathbb{R}^n$ et f une fonction convexe de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Sous quelles conditions la fonction $g(\alpha) = f(\sum_{i=1}^n \alpha_i x^i)$ est-elle convexe ?

5 **(10 points)**

Si le hessien de f est positif défini pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, alors f est strictement convexe. La réciproque de cette proposition est-elle vraie?

6 **(10 points)**

Considérer le programme quadratique

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) = x^t Q x + b^t x.$$

Montrer que le pas optimal d'une itération de la méthode du gradient est égal à

$$\alpha = \frac{-d^t \nabla f(x)}{d^t \nabla^2 f(x) d}$$

où d est la direction du gradient au point x.

7 ——— **(10 points)**

Effectuer 10 itérations de l'algorithme de Fibonacci pour trouver le maximum de la fonction $(x-1)(2-x)$ sur l'intervalle $[0,3]$. Je conseille vivement d'utiliser un petit programme de votre cru pour effectuer les calculs.

8 ——— **(20 points)**

Un problème de gestion des stocks. Soit r la demande par période pour un produit. Lorsque l'inventaire devient nul, on commande une quantité Q dont la livraison est immédiate.

Soit $f(Q) = cQ + d$ le coût de commande de Q unités et H le coût d'inventaire d'une unité du produit pendant une période. Déterminer le niveau de commande optimal ainsi que le nombre de périodes entre deux commandes successives.

9 ——— **(10 points)**

Soit la fonction $f(x,y) = (x - y^2)(x - 2y^2)$. Montrer que l'origine $(0,0)$ est un point stationnaire de f, que toutes les droites passant par $(0,0)$ admettent un minimum local en $(0,0)$ mais que $(0,0)$ n'est *pas* un minimum local de f. Pouvez-vous expliquer ce "paradoxe"?