IFT 3512: DEVOIR 2 **Patrice Marcotte**

À remettre le lundi 14 février 2000

1 (20 points)

On peut approximer une fonction g définie sur l'intervalle $[0,1]$ par un polynôme

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

en minimisant la fonction

$$f(a) = \int_0^1 [g(x) - p(x)]^2 \, dx.$$

- La fonction f est-elle convexe?
- Trouver les équations que doivent satisfaire le vecteur des coefficients optimaux a.

2 (20 points)

Dans l'espace R^n, l'algorithme du gradient converge géométriquement vers la solution avec taux de convergence α, c'est-à-dire:

$$\|x^+ - x^*\| \leq \alpha \|x - x^*\|.$$

De son côté, l'algorithme de Newton produit une suite convergeant quadratiquement:

$$\|x^+ - x^*\| \leq \beta \|x - x^*\|^2.$$

A chaque itération, l'algorithme du gradient exige le calcul d'un gradient et effectue une recherche linéaire. On évaluera, pour les besoins de la cause, le travail requis à an. L'algorithme de Newton, quant à lui, exige l'évaluation du hessien ainsi que la résolution d'un système linéaire. On supposera que ces deux opérations s'effectuent en temps bn^3.

Si l'on souhaite obtenir un résultat à ϵ près, lequel des deux algorithmes sera préféré?

3 **(20 points)**

Résoudre l'équation

$$f(x) = (x-2)^4 + (x-2)^5 = 0$$

par la méthode de Newton, en utilisant $x = 3$ comme point initial. Vous devriez observer une convergence linéaire de taux 3/4.

Maintenant, utliser la formule

$$x^{k+1} = x^k - 4f(x^k)/f'(x^k).$$

Démontrer que le taux de convergence est maintenant quadratique.

4 **(20 points)**

Soit le problème d'optimisation

$$\min f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2.$$

- Montrer que la méthode de la plus forte pente, appliquée à partir du point $x^0 = (2, 1)^t$, produit la suite de points

$$x^k = \frac{1}{3^k}(2, (-1)^k)^t.$$

- Démontrer que $f(x^{k+1}) = f(x^k)/9$.
- Comparer le résultat précédent avec la borne sur le taux de convergence donnée en cours. Quelles conclusions en tirez-vous?

5 **(20 points)**

On peut déterminer un point stationnaire d'une fonction quadratique convexe f en minimisant la fonction auxiliaire

$$F(x) = \|\nabla f(x)\|^2.$$

Comparer les taux de convergence de la méthode de la plus forte pente appliquée respectivement aux fonctions f et F. Est-ce une bonne idée de minimiser F plutôt que f?