DÉPARTEMENT D'INFORMATIQUE
ET DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

SIGLE DU COURS: IFT 3512

NOM DU PROFESSEUR: Patrice Marcotte

TITRE DU COURS: TECHNIQUES D'OPTIMISATION 2

EXAMEN FINAL

Date	:	jeudi 20 avril 2000
Heure	:	de 14h00 à 17h00
Lieu	:	Salle 1177, pavillon André Aisenstadt

DIRECTIVES PÉDAGOGIQUES:

- Documentation interdite
- L'usage de la calculatrice scientifique «de base» est autorisé.
- Répondez dans un cahier d'examen.

Ceci est un examen. Par conséquent, aucune collaboration n'est permise.

QUESTION 1	(15 points)

Soit le programme mathématique

$$\begin{array}{ll} \max & x_1 - x_2 + 2x_3^2 \\ & -x_1 - x_2 - 2x_3 \leq 0 \\ & -4x_1 - 2x_2 + x_3^2 = 0. \end{array}$$

- Résoudre ce programme, à l'aide des conditions de Kuhn-Tucker;
- trouver un programme mathématique convexe qui lui est équivalent.

QUESTION 2	(20 points)

Décrire, géométriquement *et* analytiquement, et indiquer les propriétés de deux algorithmes pour résoudre le programme mathématique

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ & Ax = b \\ & x \geq 0. \end{array}$$

QUESTION 3 (20 points)

Soit B une base optimale pour la relaxation linéaire d'un programme en variables entières et $k \in B$. En soustrayant de l'équation

$$x_k + \sum_{j \notin B} a_{kj} x_j = \overline{x}_k$$

l'inégalité valide

$$x_k + \sum_{j \notin B} \lfloor a_{kj} \rfloor x_j \leq \lfloor \overline{x}_k \rfloor$$

on obtient la coupe de Gomory

$$\sum_{j \notin B} (a_{kj} - \lfloor a_{kj} \rfloor) x_j \geq \overline{x}_k - \lfloor \overline{x}_k \rfloor .$$

- Obtenir une coupe similaire en utilisant l'opérateur $\lceil \cdot \rceil$ plutôt que $\lfloor \cdot \rfloor$;
- dériver les deux coupes correspondant à l'équation

$$x_1 + \frac{1}{7} x_3 + \frac{5}{7} x_4 = \frac{17}{7};$$

- illustrer géométriquement les deux coupes.

QUESTION 4 (15 points)

Soit le problème

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ & Ax \leq b \end{array}$$

et

$$P = I - A_1^t (A_1 A_1^t)^{-1} A_1$$

la matrice de projection sur les contraintes actives $A_1 x = b_1$. Interpréter les situations suivantes:

- $P \nabla f(x) = 0$;
- $P \nabla f(x) \neq 0$;
- $P \nabla f(x) = \nabla f(x)$.

QUESTION 5	(10 points)

Un constructeur automobile envisage l'assemblage de trois modèles. Les caractéristiques de chacun des modèles, en termes de ressources et de profits, sont indiquées dans le tableau ci-dessous.

	modèle 1	**modèle 2**	**modèle 3**
acier requis	a_1 tonnes	a_2 tonnes	a_3 tonnes
main d'œuvre requise	b_1 heures	b_2 heures	b_3 heures
profit unitaire	p_1	p_2	p_3

Sachant que A tonnes d'acier et B heures de main d'œuvre sont disponibles, formuler un programme linéaire en variables mixtes (réelles ou entières) permettant de maximiser le profit de l'entreprise sachant que, pour qu'une ligne de montage soit économiquement justifiée, au moins K véhicules doivent y être produits.

Si votre modèle contient une constante grand M, spécifier la valeur de M en fonction des paramètres du problème.

QUESTION 6	(15 points)

Vous souhaitez investir 5000$ et trois choix d'investissements s'offrent. Les rendements (en milliers de $) sont donnés par les fonctions

$$r_i(x) = a_i x + b_i \quad \text{si } x > 0, 0 \text{ sinon.}$$

Les montants investis doivent être des multiples exacts de 1000$ et on ne peut investir moins de 3000$ dans tout placement.

Indiquer comment résoudre ce problème par la programmation dynamique.

QUESTION 7 (15 points)

Soit le programme linéaire en variables entières

$$
\begin{array}{ll}
\max & c_1x_1 + c_2x_2 \\
 & Ax \leq b \\
 & x_1, x_2 \text{ entiers non négatifs.}
\end{array}
$$

où les coefficients c_1 et c_2 sont entiers.

En appliquant la technique de Branch-and-Bound un étudiant obtient l'arbre d'énumération partiel suivant, où z indique la valeur de la relaxation linéaire et x la solution optimale de la relaxation linéaire. Identifier 6 erreurs grossières ou impossibilités lors du parcours de cet arbre. Noter que le parcours de l'arbre se fait en *largeur*, tel qu'indiqué par la numérotation des nœuds.