DÉPARTEMENT D'INFORMATIQUE ET DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

SIGLE DU COURS: IFT 3512

NOM DU PROFESSEUR: Patrice Marcotte

TITRE DU COURS: TECHNIQUES D'OPTIMISATION 2

EXAMEN DE MI-SESSION

Date	:	Jeudi 24 février 2000
Heure	:	de 9h30 à 11h30
Lieu	:	Salle AA1177

DIRECTIVES PÉDAGOGIQUES:

- Aucune documentation permise.
- L'usage de la calculatrice scientifique "de base" est autorisé.
- Répondez dans un cahier d'examen.

Ceci est un examen. Par conséquent, aucune collaboration n'est permise.

QUESTION 1 (20 points)

Soit
$$X = \{(x = (x_1, x_2) \in R^2 : x_2(x_1 + 1) \geq 1, x_2 + (x_1 - 1)^2 \leq 2, 2x_2 \geq x_1\}.$$

- Illustrer géométriquement l'ensemble X.
- X est-il convexe? Justifier votre réponse.
- Trouver toutes les solutions du programme mathématique
$$\min_{x \in X} c^t x$$
pour les valeurs suivantes du vecteur c:
  1. $c^t = (0, 0)$
  2. $c^t = (1, -2)$
  3. $c^t = (-1, 0)$
  4. $c^t = (1, 1)$.

QUESTION 2 (20 points)

On souhaite estimer $1/a$ en appliquant la méthode de Newton à l'équation
$$\frac{1}{x} - a = 0.$$

- Soit x_+ le point obtenu à partir de x. Déterminer la relation liant les points x et x_+.
- Poser $x = \frac{1}{a} + \epsilon$. Montrer que la convergence locale de la méthode est quadratique, c'est-à-dire:
$$\left| x_+ - \frac{1}{a} \right| = O(\epsilon^2) = O\left(\left(x - \frac{1}{a} \right)^2 \right).$$
- Quel choix proposez-vous comme point de départ?
- La méthode précédente n'utilise aucune division. Proposer une méthode n'utilisant qu'une seule division pour trouver la racine carrée d'un nombre positif a. Suggestion: chercher la racine carrée du nombre $1/a$. Noter que sur un ordinateur binaire, une division par 2 n'est pas considérée comme une division!

QUESTION 3	(15 points)

On applique la méthode de Newton au problème d'optimisation

$$\min_{x \in R^n} f(x).$$

Montrer que la méthode est invariante aux transformations linéaires: si $x = Ay + b$ où A est une matrice inversible, alors il y a correspondance parfaite entre les points produits par la méthode de Newton sur le problème original et sur le problème

$$\min_{y \in R^n} f(Ay + b).$$

QUESTION 4	(15 points)

Vous voulez connaître le *maximum* de la fonction

$$f(x) = 2x - 3x^2 + 1$$

avec une précision supérieure (meilleure) à $0,25$. Résoudre ce problème à l'aide de l'algorithme de Fibonacci. Spécifier l'intervalle de départ.

QUESTION 5	(20 points)

Trouver et déterminer la nature des points critiques de la fonction

$$f(x, y) = \sin(xy) + \frac{x^3}{3} - 3x + 4$$

QUESTION 6	(20 points)

Soit le programme mathématique

$$\begin{array}{ll} \min & x_1^2 + 4x_2^2 - 2x_1 - 10x_2 \\ & x_2 \leq x_1 + 1 \\ & x_1 + x_2 \geq 1 \\ & x_1 + x_2 \leq 3 \\ & x_2 \geq x_1 - 1. \end{array}$$

Déterminer géométriquement les directions de Zoutendijk, de Frank-Wolfe et du gradient projeté (deux versions) au point $(1, 3/2)^t$.