

IFT 3512 DÉMO 1 (semaine du 7 janvier 2002)

1. Montrer qu'un ensemble fermé est convexe si et seulement si tout point milieu d'un segment dont les extrémités appartiennent à l'ensemble appartient également à l'ensemble.
2. Montrer qu'une fonction continue f est convexe si et seulement si

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y).$$

3. Donner une expression pour le gradient des fonctions composées $f(Ax + b)$ et $f(G(x))$.
4. Soit f une fonction convexe. Montrer que la fonction $f((x+h) - f(x))/h$ est une fonction croissante de h .
5. L'inégalité dite "arithmétique-géométrique" stipule que, pour tout ensemble fini de nombres positifs,

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j \geq \left(\prod_{j=1}^n x_j\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Cette inégalité peut être démontrée de multiples façons, et en particulier par induction.

En se basant sur la concavité de la fonction logarithmique, démontrer l'inégalité plus générale:

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j x_j \geq \prod_{j=1}^n x_j^{\alpha_j},$$

où la somme des scalaires positifs α_j est égale à 1.

6. Soient p et q deux nombres positifs dont la somme des inverses est égale à 1. Utiliser l'inégalité arithmétique-géométrique pour démontrer les inégalités de Young (x et y sont des nombres positifs):

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$

et de Holder:

$$\sum_{j=1}^n |x_j y_j| \leq \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{j=1}^n |y_j|^q\right)^{1/q}.$$