IFT 3512 DÉMO 1 (semaine du 7 janvier 2002)

1. Montrer qu'un ensemble fermé est convexe si et seulement si tout point milieu d'un segment dont les extrémités appartiennent à l'ensemble appartient également à l'ensemble.

2. Montrer qu'une fonction continue f est convexe si et seulement si

$$f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) \leq \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y).$$

3. Donner une expression pour le gradient des fonctions composées $f(Ax+b)$ et $f(G(x))$.

4. Soit f une fonction convexe. Montrer que la fonction $f((x+h)-f(x))/h$ est une fonction croissante de h.

5. L'inégalité dite "arithmétique-géométrique" stipule que, pour tout ensemble fini de nombres positifs,

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j \geq (\prod_{j=1}^{n} x_j)^{\frac{1}{n}}.$$

   Cette inégalité peut être démontrée de multiples façons, et en particulier par induction.

   En se basant sur la concavité de la fonction logarithmique, démontrer l'inégalité plus générale:

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j \geq \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_j},$$

   où la somme des scalaires positifs α_j est égale à 1.

6. Soient p et q deux nombres positifs dont la somme des inverses est égale à 1. Utiliser l'inégalité arithmétique-géométrique pour démontrer les inégalités de Young (x et y sont des nombres positifs):

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$

   et de Holder:

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j y_j| \leq \Big(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\Big)^{1/p} \Big(\sum_{j=1}^{n} |y_j|^q\Big)^{1/q}.$$