

IFT 3512 DÉMO 2 (semaine du 14 janvier 2002)

1. Démontrer que le maximum de fonctions convexes est convexe.
2. Donner le développement de Taylor de la fonction $\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ autour du point $(3, 4)^t$.
3. Trouver le minimum de la fonction

$$f(x, y, z) = 2x^2 + xy + y^2 + yz + z^2 - 6x - 7y - 8z + 9$$

et démontrer que c'est un minimum global.

4. On observe m valeurs $g(x_i), i = 1, \dots, m$ et l'on cherche le polynôme p de degré $n < m$ qui minimise l'erreur quadratique

$$\sum_{k=1}^m (g(x_k) - h(x_k))^2.$$

Trouver le polynôme en question.

5. Trouver le polynôme de degré n qui approxime le mieux, au sens des "moindres carrés", une fonction g définie sur l'intervalle $[0, 1]$. L'objectif à minimiser est:

$$f(a) = \int_0^1 [g(x) - p(x)]^2 dx,$$

où a est le vecteur des coefficients de p .

6. Dans le théorème de convergence globale, la condition la plus importante est peut-être que l'application soit fermée à l'extérieur de l'ensemble des solutions. Soit par exemple l'algorithme (multifonction)

$$A(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x-1) + 1 & x > 1 \\ \frac{1}{2}x & x \leq 1 \end{cases}$$

et l'ensemble solution $\{0\}$. Bien que la fonction $|x|$ soit une fonction de descente, l'algorithme, qui n'est pas fermé au point 1, génère une suite qui converge vers 1 si le point initial est > 1 .

7. Soit $\{0\}$ l'ensemble solution, x la fonction de descente et

$$A(x) = \begin{cases} [0, x) & 0 < x \leq 1 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

l'algorithme. La suite définie par

$$\begin{aligned} x_0 &= 1 \\ x_{k+1} &= x_k - \frac{1}{2^{k+2}} \in A(x_k) \end{aligned}$$

converge vers le point $1/2$ qui ne fait pas partie de l'ensemble solution.

8. Montrer que l'algorithme défini par

$$d_j = \begin{cases} -\frac{\partial f(x)}{\partial x_j} & \text{si } x_j > 0 \text{ ou } x_j = 0 \text{ et } \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \leq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

n'est pas fermé.

9. Soit la suite définie par $x_0 = a > 0$ et

$$x_{k+1} = \frac{1}{2} \left(x_k + \frac{a}{x_k} \right).$$

Déterminer le point limite de cette suite et démontrer que la convergence vers ce point est quadratique.

10. Montrer que la convergence de la suite $(1/k)^k$ vers zéro est superlinéaire.