

IFT 3512 DEVOIR 1

(à remettre au *début* de la démonstration du mardi 22 janvier)

1 _____ (25 points)

Soit $0 < p < q$, et soit $f(x, y) = (y - px^2)(y - qx^2)$.

- Montrer que l'origine est un point stationnaire de f ;
- montrer que l'origine est un minimum local le long de toutes les droites passant par l'origine;
- montrer que l'origine n'est pas un minimum (même local!) de la fonction f ;
- tracer le graphe de la fonction f .

2 _____ (25 points)

Trouver les points stationnaires de la fonction

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + \beta xy + 2 + 2y$$

pour toutes les valeurs du paramètre β et déterminer leur nature.

3 _____ (25 points)

Soit g une fonction convexe et monotone croissante d'une seule variable, et f une fonction convexe définie sur un sous-ensemble convexe X de \mathbb{R}^n . Montrer que la fonction

$$h(x) = g(f(x))$$

est convexe sur X et utiliser ce résultat pour démontrer que, si β est un scalaire positif et Q une matrice semidéfinie positive, alors la fonction $h(x) = \exp(\beta x^t Q x)$ est convexe sur \mathbb{R}^n .

4 _____ (25 points)

Déterminer la nature (convexité, concavité, stricte, forte, simple) des fonctions suivantes:

- $\sqrt{1 + x^2}$;
- $\exp(x^2)$;
- $2x_1^2 - 3x_1x_2 + 5x_2^2 - 2x_1 + 6x_2$;
- $2x^4 + 3x^3 + 4x^2$;
- $x/(1 + x^4)$.