IFT 3512: DEVOIR 5 **Patrice Marcotte**

À remettre au début du cours du lundi 15 avril 2002

1 (35 points)

Un investisseur doit choisir un sous-ensemble d'un ensemble de 7 investissements $\{1, 2, \dots, 7\}$. Modéliser les contraintes suivantes avec des variables et opérateurs logiques, puis à l'aide de variables binaires et d'équations ou (et) inéquations linéaires:

1. Aucun des investissements ne peut être choisi.
2. Au moins un investissement doit être choisi.
3. L'investissement 1 ne peut être choisi si l'investissement 3 est choisi.
4. L'investissement 4 ne peut être choisi que si l'investissement 2 est choisi.
5. Soit les investissements 1 et 5 sont choisis, soit aucun des deux.
6. L'investisseur doit choisir soit au moins un des investissements $\{1, 2, 3\}$ soit au moins deux des investissements $\{2, 4, 5, 6\}$.

2 (35 points)

Formuler les ensembles de contraintes suivantes comme des contraintes linéaires avec variables entières:

1. $u = \min\{x_1, x_2\}$ avec $0 \leq x_j \leq C$, $j = 1, 2$.
2. $v = |x_1 - x_2|$ avec $0 \leq x_j \leq C$, $j = 1, 2$.
3. L'ensemble $Y = X \backslash \{x^*\}$ où $x^* \in X = \{x \in Z^n : Ax \leq b\}$.

3 (30 points)

On considère le problème de sac-à-dos

$$\begin{array}{ll} \max & \sum_{i=1}^{m} c_j x_j \\ \text{sujet à} & \sum_{i=1}^{m} a_j x_j \leq b \end{array}$$

où tous les coefficients et variables sont des entiers positifs ou nuls.
On peut résoudre ce problème en résolvant, récursivement, l'équation de programmation dynamique:

$$z(k) = \max_{1 \leq j \leq m} \{c_j + z(k - a_j)\}, \tag{1}$$

où k est un entier et $z(k)$ est la valeur optimale du problème de sac-à-dos

$$\begin{array}{ll} \max & \sum_{i=1}^{m} c_j x_j \\ \text{sujet à} & \sum_{i=1}^{m} a_j x_j \leq k \end{array}$$

On dénote par $j(k)$ le plus petit indice atteignant le maximum de (1). Démontrer les résultats suivants:

1. Si $j(k) = 1$ pour tout $k = n + 1, n + 2, \dots, n = \max_j a_j$ alors $j(k) = 1$ pour tout $k > n$.
2. Si $c_1/a_1 > c_2/a_2 \geq \cdots \geq c_m/a_m$, prouver que $j(k) = 1$ dès que
$$k \geq \frac{c_1}{(c_1/a_1) - (c_2/a_2)}.$$