DÉPARTEMENT D'INFORMATIQUE ET DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

SIGLE DU COURS: IFT 3512

NOM DU PROFESSEUR: Patrice Marcotte

TITRE DU COURS: TECHNIQUES D'OPTIMISATION 2

EXAMEN FINAL

Date	:	Mardi 30 avril 2002
Heure	:	13h30 à 16h30
Lieu	:	Salle 1177, pavillon André Aisenstadt

DIRECTIVES PÉDAGOGIQUES:

- Aucune documentation permise.
- L'usage de la calculatrice est interdit.
- Répondre dans un cahier d'examen.

Ceci est un examen. Par conséquent, aucune collaboration n'est permise.

QUESTION 1	(20 points)

Soit le programme quadratique

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & \frac{1}{2}x^tQx + b^tx \\ \text{sujet à} & Ax \geq b. \end{array}$$

1. Écrire les conditions d'optimalité de Kuhn et Tucker. Donner une condition suffisante pour que toute solution du système de Kuhn-Tucker soit un optimum global.

2. Formuler le problème comme un programme linéaire en variables entières (si vous avez besoin d'une petite hypothèse technique, n'hésitez pas à la formuler). Cette formulation est-elle intéressante, d'un point de vue algorithmique, si la matrice Q est définie positive?

QUESTION 2	(25 points)

Le problème de localisation sur un graphe bipartite peut s'exprimer comme le programme en variables entières:

$$\begin{array}{lll} \min\limits_{x,y} & \sum\limits_{i\in I}\sum\limits_{j\in J} c_{ij}x_{ij} + \sum\limits_{j\in J} f_j y_j & \\ \text{sujet à} & \sum\limits_{j\in J} x_{ij} = 1 & \forall i \in I \\ & x_{ij} \leq y_j & \forall (i,j) \in I \times J \\ & y_j \in \{0,1\} & \forall j \in J. \end{array}$$

1. Formuler le dual lagrangien obtenu en dualisant les contraintes de satisfaction de la demande (contraintes d'égalité), et indiquer comment résoudre le programme correspondant à un vecteur de multiplicateurs u.

2. Soit $C = (c_{ij}) = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 4 & 10 & 2 & 6 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & 8 & 6 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$ la matrice des coûts de transport et $f = (4, 9, 11, 7, 5)$ le vecteur des coûts d'investissement. Évaluer la fonction duale au point $u = (5, 6, 3, 2, 6, 4)$ pour obtenir une borne inférieure sur la valeur de l'objectif initial.

3. À l'aide de la solution $(x(u), y(u))$ obtenue précédemment, construire une "bonne" solution réalisable. Cette solution s'éloigne-t-elle beaucoup de l'optimalité?

QUESTION 3 (25 points)

Deux compagnies aériennes, A et B, sont en compétition dans un pays donné. Chaque compagnie possède son propre réseau. La compagnie A souhaite maximiser son profit en déterminant des tarifs pour ses vols, chaque vol pouvant comporter une ou plusieurs escales. Formuler le programme à deux niveaux correspondant, en tenant compte des hypothèses suivantes:

1. Les prix du concurrent B sont connus de A et ne sont pas affectés par ceux de A.
2. Les capacités des deux transporteurs sont connues.
3. Il n'y a qu'une catégorie de passagers et qu'une seule classe tarifaire.
4. La demande globable pour chaque marché est indépendante du prix.
5. Les passagers choisissent les vols les moins chers. En cas d'égalité, ils choisissent les vols de la compagnie A.

Quelle est la relation entre ce problème et le problème de tarification de péages routiers étudié en cours? Quelles hypothèses devraient être modifiées afin de rendre votre formulation plus réaliste?

QUESTION 4 (20 points)

Une compagnie doit établir un horaire de production pour les neuf prochaines semaines. Toute tâche entreprise doit être complétée sans interruption. Une tâche s'étend sur plusieurs semaines et requiert un certain nombre d'ouvriers à chaque semaine. Ainsi, si une tâche i dure p_i semaines, on dénote par $l_{i,s}$ le nombre d'ouvrier requis à la semaine s ($s = 1, \dots, p_i$). Soit L_s le nombre total d'ouvriers disponibles à la semaine s. Les données d'un problème peuvent s'inscrire dans le tableau suivant:

tâche	durée	semaine 1	semaine 2	semaine 3	semaine 4
1	3 semaines	2 ouvriers	3 ouvriers	1 ouvrier	–
2	2 semaines	4 ouvriers	5 ouvriers	–	–
3	4 semaines	2 ouvriers	4 ouvriers	1 ouvriers	5 ouvriers
4	4 semaines	3 ouvriers	4 ouvriers	2 ouvriers	2 ouvriers
5	3 semaines	9 ouvriers	2 ouvriers	3 ouvriers	–

1. Formuler le problème consistant à minimiser le nombre *maximal* d'ouvriers utilisés à tout moment.
2. Exprimer la contrainte: la tâche 1 doit être effectuée au moins deux semaines avant la tâche 3.
3. Exprimer la contrainte: la tâche 4 ne doit pas débuter plus d'une semaine après la tâche 5.
4. Exprimer la contrainte: les tâches 1 et 2 ne peuvent être effectuées simultanément.

QUESTION 5	(25 points)

Préambule: On considère le programme mathématique

$$\begin{array}{rll} \min\limits_{x \geq 0} & f(x) & \\ \text{sujet à} & g_i(x) \leq 0 & i \in I \\ & h_j(x) = 0 & j \in J. \end{array}$$

On suppose que toutes les fonctions impliquées sont continues. Soit le problème pénalisé:

$$\min_{x \geq 0} f(x) + \mu \sum_{i \in I} [\max\{0, g_i(x)\}]^2 + \sum_{j \in J} [h_j(x)]^2.$$

On suppose que le problème pénalisé possède une solution $x(\mu)$ et que la suite $\{x(\mu)\}$ est contenue dans un ensemble compact. Soit $\theta(\mu)$ la valeur optimale du problème pénalisé. Un théorème stipule que

$$\inf_{x \geq 0} \{f(x), g_i(x) \leq 0, i \in I, h_j(x) = 0, j \in J\} = \lim_{\mu \to \infty} \theta(\mu)$$

et que tout point d'accumulation de la suite $x(\mu)$ est solution du problème initial.

Question: soit le programme mathématique

$$\begin{array}{rl} \min & x^3 \\ \text{sujet à} & x = 1, \end{array}$$

dont la solution optimale est triviale! Soit le programme pénalisé

$$\theta(x, \mu) = \min x^3 + \mu(x-1)^2.$$

1. Vérifier que, pour chaque valeur positive de μ, ce problème est non borné.
2. Tracer le graphe de la fonction θ pour une valeur "élevée" du paramètre μ.
3. Expliquer pourquoi la conclusion du théorème mentionné ci-dessus ne tient pas.
4. Résoudre le problème pénalisé avec la contrainte additionnelle $|x| \leq 2$. Quelle est la limite de la suite des solutions optimales? La conclusion du théorème est-elle valide dans ce cas? Commenter.