IFT 3512: CORRIGÉ DU DEVOIR 2 **Patrice Marcotte**

1 **(20 points)**

Posons $e_0 = \|x^0 - x^*\|$, et soit n le nombre d'itérations requis. Pour la méthode du gradient, on a:

$$\begin{aligned} \|x^n - x^*\| &\leq \alpha^n e_0 \\ &\leq \epsilon \\ &\Rightarrow n \geq \lg(\epsilon/e_0)/\lg\alpha \end{aligned}$$

et le travail requis est

$$t_G = akn = \frac{ak\lg(\epsilon/e_0)}{\lg\alpha}.$$

Pour la méthode de Newton, on obtient:

$$\begin{aligned} \|x^n - x^*\| &\leq \frac{1}{\beta}(\beta e_0)^{2^n} \\ &\leq \epsilon \\ \\ &\Rightarrow 2^n \geq \lg(\beta\epsilon)/\lg(\beta e_0) \\ &\Rightarrow n \geq \lg\frac{\lg(\beta\epsilon)}{\lg(\beta e_0)} \end{aligned}$$

et le travail requis est

$$t_N = bk^3 n = bk^3 \lg\frac{\lg(\beta\epsilon)}{\lg(\beta e_0)}.$$

Lorsque ϵ tend vers zéro, il est facile de vérifier que t_N/t_G tend vers zéro. La méthode de Newton est donc asymptotiquement plus efficace. Par contre, pour des valeurs données des paramètres $\epsilon, a, b, e_0, \alpha$ et β, il est possible que la méthode du gradient soit plus rapide en temps de calcul ou même en nombre d'itérations.

2 **(20 points)**

$$x^+ = x - \frac{x^4 + x^5}{4x^3 + 5x^4} = \frac{\frac{3x}{4} + \frac{x^2}{4}}{1 + \frac{5x}{4}} \approx \left(\frac{3x}{4} + \frac{x^2}{4}\right)\left(1 - \frac{5x}{4}\right) = \frac{3x}{4} + O(x^2),$$

d'où l'on tire la convergence linéaire de taux 3/4. Dans le deuxième cas, on a:

$$x^+ = x - \frac{4(x^4 + x^5)}{4x^3 + 5x^4} = \frac{x^2}{4 + 5x} \leq x^2$$

et la convergence est quadratique.

3 **(20 points)**

$$\begin{aligned}\nabla f(x^k) &= (2x_1^k, 4x_2^k) = (4/3^k)(1, (-1)^k)\\ \nabla f(x^{k+1}) &= (4/3^{k+1})(1, (-1)^{k+1}) = (4/3^k)(1/3, (-1)^{k+1}/3).\end{aligned}$$

On a:

$$\nabla f(x^{k+1})\nabla f(x^k)^t = \frac{4}{3^k}\left[\frac{1}{3} + (-1)^{2k+1}\frac{1}{3}\right] = 0.$$

On en déduit que les deux gradients sont orthogonaux et que donc les formules correspondent bien à celles de l'algorithme du gradient pour des fonctions quadratiques convexes. On aurait bien sûr pu procéder autrement pour la démonstration. Maintenant:

$$\frac{f(x^{k+1})}{f(x^k)} = \frac{(4/3^k)^2(1+2)}{(4/3^{k+1})^2(1+2)} = \frac{1}{9}.$$

En parallèle, l'inégalité de Kantorovitch nous donne:

$$\left(\frac{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}}{\lambda_{\max} + \lambda_{\min}}\right)^2 = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}.$$

Dans ce cas précis, la théorie coïncide avec la pratique, ce qui n'est pas toujours le cas.

4 **(20 points)**

La matrice hessienne de la fonction $\frac{1}{2}\|Qx + b\|^2$ est le carré de Q. Ses valeurs propres sont donc les carrés des valeurs propres de Q. Posons:

$$r = \lambda_{\max}(Q)/\lambda_{\min}(Q).$$

Les estimés des taux de convergence pour les deux méthodes fournis par l'inégalité de Kantorovitch sont, respectivement, $\rho_1 = ((r^2-1)/(r^2+1))^2$ et $\rho_2((r-1)/(r+1))^2$. Puisque

$$\sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}} = \frac{(r^2-1)/(r^2+1)}{(r-1)/(r+1)} = \frac{(r+1)^2}{r^2+1} \geq 1,$$

le taux de convergence est moins bon (supérieur) à celui de la méthode traditionnelle. Par contre, cette technique est intéressante si on souhaite résoudre des systèmes $F(x) = 0$ où la fonction F n'est pas un gradient.

5 **(20 points)**

Appliquons la méthode de Aitken à la résolution du système linéaire $Ax = b$. Si on dénote par L la matrice triangulaire inférieure de A et par U la matrice triangulaire supérieure, on obtient ($\bar{x}$ est le point intermédiaire obtenu à la fin de la passe avant):

$$\begin{aligned}L\bar{x} + (A-L)x &= b\\ Ux^+ + (A-U)\bar{x} &= b,\end{aligned}$$

d'où l'on tire:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= (I - L^{-1}A)x + L^{-1}b\\ x^+ &= (I - U^{-1}A)\bar{x} + U^{-1}b\\ &= (I - U^{-1}A)((I - L^{-1}A)x + L^{-1}b) + U^{-1}b.\end{aligned}$$