

## IFT 3512 DÉMO 1 (semaine du 5 janvier 2004)

1. Montrer qu'un ensemble fermé est convexe si et seulement si tout point milieu d'un segment dont les extrémités appartiennent à l'ensemble appartient également à l'ensemble.
2. Montrer qu'une fonction continue  $f$  est convexe si et seulement si

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y).$$

3. Donner une expression pour le gradient des fonctions composées  $f(Ax + b)$  et  $f(G(x))$ .
4. Soit  $f$  une fonction convexe. Montrer que la fonction  $f((x+h) - f(x))/h$  est une fonction croissante de  $h$ .
5. L'inégalité dite "arithmétique-géométrique" stipule que, pour tout ensemble fini de nombres positifs,

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j \geq \left(\prod_{j=1}^n x_j\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Cette inégalité peut être démontrée de multiples façons, et en particulier par induction.

En se basant sur la concavité de la fonction logarithmique, démontrer l'inégalité plus générale:

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j x_j \geq \prod_{j=1}^n x_j^{\alpha_j},$$

où la somme des scalaires positifs  $\alpha_j$  est égale à 1.

6. Soient  $p$  et  $q$  deux nombres positifs dont la somme des inverses est égale à 1. Utiliser l'inégalité arithmétique-géométrique pour démontrer les inégalités de Young ( $x$  et  $y$  sont des nombres positifs):

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$

et de Holder:

$$\sum_{j=1}^n |x_j y_j| \leq \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{j=1}^n |y_j|^q\right)^{1/q}.$$