

IFT 3512 DEVOIR 1

(à remettre au *début* du cours du mardi 27 janvier)

1 _____ (20 points)

Soit $0 < p < q$, et soit $f(x, y) = (y - px^2)(y - qx^2)$.

- Montrer que l'origine est un point stationnaire de f ;
- montrer que l'origine est un minimum local le long de toutes les droites passant par l'origine;
- montrer que l'origine n'est pas un minimum (même local!) de la fonction f ;
- tracer le graphe de la fonction f .

2 _____ (15 points)

Déterminer les points stationnaires des fonctions

$$(i) \quad \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - 2x^2 - 4x$$
$$(ii) \quad -x_1 + x_1x_2^3 - 3x_2.$$

ainsi que leur nature respective.leur nature.

3 _____ (20 points)

Considérer le programme quadratique

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) = x^t Q x + b^t x.$$

Montrer que le pas optimal d'une itération de la méthode du gradient est égal à

$$\alpha = \frac{-d^t \nabla f(x)}{d^t \nabla^2 f(x) d}$$

où d est la direction du gradient au point x .

4 _____ (15 points)

Un problème de gestion des stocks. Soit r la demande par période pour un produit. Lorsque l'inventaire devient nul, on commande une quantité Q dont la livraison est immédiate.

Soit $f(Q) = cQ + d$ le coût de commande de Q unités et H le coût d'inventaire d'une unité du produit pendant une période. Déterminer le niveau de commande optimal ainsi que le nombre de périodes entre deux commandes successives.

5 _____ (10 points)

En étudiant son hessien, déterminer les zones du plan où la fonction x^2/y est convexe ou concave.

6 _____ (20 points)

Soient f et g deux fonctions de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} , dont les valeurs sont positives. Si f est convexe et g est concave, démontrer, en utilisant la définition, que la fonction

$$h(x) = \frac{(f(x))^2}{g(x)}$$

est convexe.