IFT 3512: DEVOIR 2 **Patrice Marcotte**

À remettre le lundi 16 février au matin

1 **(20 points)**

Dans l'espace R^k, l'algorithme du gradient converge (en général) géométriquement vers la solution x^* avec taux de convergence α, c'est-à-dire:

$$\|x^+ - x^*\| \leq \alpha \|x - x^*\|.$$

De son côté, l'algorithme de Newton produit une suite convergeant, sous des hypothèses favorables, quadratiquement:

$$\|x^+ - x^*\| \leq \beta \|x - x^*\|^2.$$

À chaque itération, l'algorithme du gradient exige le calcul d'un gradient et effectue une recherche linéaire. On évaluera, pour les besoins de la cause, le travail requis à ak par itération. L'algorithme de Newton, quant à lui, exige l'évaluation du hessien ainsi que la résolution d'un système linéaire. On supposera que ces deux opérations s'effectuent en temps bk^3 par itération.

Si l'on souhaite obtenir un résultat à ϵ près, lequel des deux algorithmes sera le plus efficace?

2 **(20 points)**

Résoudre l'équation

$$f(x) = (x-2)^4 + (x-2)^5 = 0$$

par la méthode de Newton, en utilisant $x = 3$ comme point initial. Vous devriez observer une convergence linéaire de taux $3/4$.

Maintenant, utiliser la formule

$$x^+ = x - 4f(x)/f'(x)$$

et montrer que l'ordre de convergence associé est quadratique.

3 **(20 points)**

Soit le problème d'optimisation

$$\min f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2.$$

- Montrer que la méthode de la plus forte pente, appliquée à partir du point $x^0 = (2, 1)^t$, produit la suite de points

$$x^k = \frac{1}{3^k}(2, (-1)^k)^t.$$

- Montrer que $f(x^{k+1}) = f(x^k)/9$.
- Faire le lien entre le résultat précédent et la borner sur le taux de convergence donnée en cours. Quelles conclusions en tirez-vous?

4 **(20 points)**

On peut déterminer un point stationnaire d'une fonction quadratique convexe f en minimisant la fonction auxiliaire

$$F(x) = \|\nabla f(x)\|^2.$$

Si f est quadratique et convexe, comparer les taux de convergence de la méthode du gradient appliquée respectivement aux fonctions f et F. Est-ce une bonne idée de minimiser F plutôt que f?

5 **(20 points)**

La méthode d'Aitken minimise une fonction de plusieurs variables en minimisant successivement par rapport à chacune des variables en deux temps: d'abord dans l'ordre des indices des variables, puis dans l'ordre inverse. Si la fonction objectif est quadratique, exprimer x^+ en fonction de x.