IFT 3512: DEVOIR 2 **Patrice Marcotte**

À remettre le mardi 16 mars 2004

1 **(20 points)**

Soit le programme mathématique

$$
\begin{aligned}
\min \quad & x_1^2 + 4x_2^2 - 2x_1 - 10x_2 \\
& x_2 \leq x_1 + 1 \\
& x_1 + x_2 \geq 1 \\
& x_1 + x_2 \leq 3 \\
& x_2 \geq x_1 - 1.
\end{aligned}
$$

Déterminer géométriquement les directions de Zoutendijk, de Frank-Wolfe et du gradient projeté (deux versions) au point $(1, 3/2)^t$.

2 **(60 points)**

Soit le programme mathématique

$$
\min \quad (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 1)^2
$$

$$
\begin{aligned}
x_1^2 + x_2^2 &\leq 16 \\
x_1 &\geq -2.
\end{aligned}
$$

1. Tracer le domaine réalisable;
2. l'objectif est-il convexe?
3. le domaine est-il convexe?
4. déterminer géométriquement la (les) solution(s) locale(s) et globale(s);
5. écrire les conditions de Kuhn et Tucker;
6. résoudre "géométriquement" le système de Kuhn-Tucker;
7. résoudre analytiquement le système de Kuhn-Tucker;
8. on considère l'algorithme où la direction d'amélioration est obtenue en minimisant, sur l'ensemble réalisable, l'approximation linéaire de l'objectif, comme dans l'algorithme de Frank et Wolfe. Illustrer géométriquement une itération de l'algorithme à partir du point (0,2), en effectuant une recherche linéaire "exacte";
9. répéter 4, 5 et 6 en substituant au problème de minimisation un problème de maximisation.

3 ——— **(20 points)**

Soit le programme

$$\begin{aligned} \min_{d} \quad & c^t d \\ & Ad \leq 0 \\ & \|d\|_p \leq 1 \end{aligned}$$

où $c \neq 0$ et $\|d\|_p = (\sum_j |d_j|^p)^{1/p}$. Montrer que, si $p > 1$, le multiplicateur associé à la deuxième contrainte est non nul et que, si $p = 1$ le programme peut se ramener à un programme linéaire. Démontrer également ce résultat pour la norme:

$$\|d\| = \max_j \{|d_j|\}.$$