UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL
DÉPARTEMENT D'INFORMATIQUE ET DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

EXAMEN FINAL
IFT 3512 MODÈLES DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

Professeur : Patrice MARCOTTE

Date: mardi 27 avril 2004
Heure: 8h30 à 11h30
Salle: Salle 1411, Pavillon André-Aisenstadt

AUCUNE DOCUMENTATION AUTORISÉE

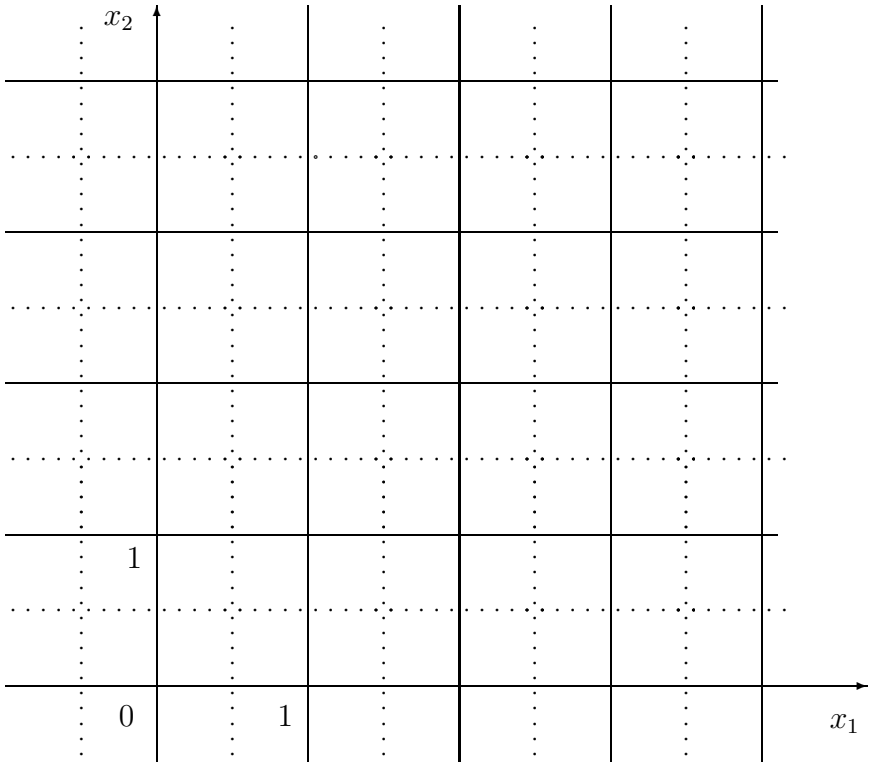
LA CALCULATRICE EST NON SEULEMENT INUTILE, MAIS INTERDITE

1 **(25 points)**

Soit le programme linéaire en variables entières:

$$\begin{aligned} \max_{x_1,x_2} \quad & -x_1 + 2x_2 \\ & x_1 + x_2 \geq 1 \\ & -x_1 + x_2 \leq 1 \\ & 4x_1 - 6x_2 \leq 9 \\ & 10x_1 + 4x_2 \leq 41 \qquad x_1,x_2 \text{ entiers non négatifs.} \end{aligned}$$

1. Tracer le domaine réalisable sur la partie quadrillée de la page. Poser $x_1 = 3$ pour la troisième contrainte et $x_1 = 5/2$, $x_1 = 7/2$ pour la quatrième vous facilitera la tâche;
2. énumérer l'ensemble des points admissibles;
3. quelle est la solution optimale (justifier votre réponse)?
4. où se trouve sur la figure la solution optimale de la relaxation linéaire du problème?
5. donner une coupe valide (pas nécessairement par la technique vue en cours) à la solution optimale de la relaxation linéaire; tracer la droite correspondant à cette coupe sur le graphique;
6. dans un algorithme de Branch-and-Bound, donner les trois conditions qui assurent qu'un sommet de l'arbre soit sondé;
7. résoudre le problème par la technique de Branch-and-Bound. Brancher sur la variable x_1 en priorité. Vous pouvez trouver géométriquement la solution des problèmes linéaires.



2 **(20 points)**

Soit $X \subseteq R^n$ un ensemble *borné* de points à coordonnées entières, et

$$H = \{x \in R^n : ax + b = c\}$$

un hyperplan. À l'aide d'équations linéaires et de variables binaires, décrire l'ensemble

$$X - H = \{x \in X : x \notin H\}.$$

3 **(20 points)**

Décrire de façon détaillée (en utilisant une notation mathématique) l'algorithme du gradient réduit.

4 **(15 points)**

Donner les principes généraux sous-tendant les méthodes de points intérieurs. Mieux encore: décrire une telle méthode.

5 **(10 points)**

Soit f une fonction concave définie sur un ensemble convexe et compact, et soit le programme mathématique

$$\min_{x \in X} f(x).$$

Démontrer qu'à chaque itération d'un algorithme utilisant des directions admissibles le pas optimal est égal au pas maximal. En déduire que l'algorithme de Frank et Wolfe ne visite que des points extrémaux de l'ensemble X.

6 **(20 points)**

Montrer que le point (3,3) est à la fois un point de Kuhn-Tucker et l'*unique* optimum du programme mathématique

$$\min_{x_1,x_2} \quad x_1^4 + x_2^4 + 12x_1^2 + 6x_2^2 - x_1x_2 - x_1 - x_2$$

$$\begin{aligned} & x_1 + x_2 \geq 6 \\ & 2x_1 - x_2 \geq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$