

IFT 3512 DEVOIR 1

(à remettre au *début* de la démo du 8 février)

1 _____ (15 points)

Démontrer que le maximum et la somme de fonctions convexes sont convexes. Qu'en est-il du minimum de fonctions convexes?

2 _____ (20 points)

Soit A une matrice définie positive, c'est-à-dire:

$$x^t Ax > 0 \quad \forall x \neq 0.$$

Si A est symétrique, on sait alors que A est définie positive si et seulement si ses valeurs propres sont positives. Ce résultat est-il valide si A n'est pas symétrique?

3 _____ (15 points)

Étudier le comportement de la méthode de Newton appliquée à la minimisation de la fonction convexe $x^{4/3}$.

4 _____ (20 points)

Trouver les points critiques (stationnaires) de la fonction

$$f(x, y) = x^5 - xy^6$$

et déterminer leur nature.

5 _____ (15 points)

Montrer que la fonction

$$\log \sum_{i=1}^n c_i e^{a_i^t x}$$

est convexe.

Suggestion: justifier le fait qu'on puisse travailler avec une fonction d'une seule variable, calculer la dérivée seconde, et utiliser l'inégalité de Young.

6 _____ (15 points)

Démontrer l'inégalité

$$\theta x + (1 - \theta)y \leq \sqrt{\log(\theta e^{x^2} + (1 - \theta)e^{y^2})} \quad .$$