

IFT 3512 DEVOIR 5

(à remettre le 25 avril à 8h30 en salle d'examen)

1 _____ (15 points)

Formuler les contraintes suivantes comme des contraintes linéaires impliquant des variables entières. Dans tous les cas, faire l'hypothèse que les variables x_j appartiennent à l'intervalle $[0, M]$.

- $u = \min\{x_1, x_2\}$.
- $u = |x_1 - x_2|$.
- $x_1 x_2 = 0$.
- $u \in X - \{a\}$, où $a \in X$ et $X = \{x \in Z^n : Ax \leq b\}$.

2 _____ (20 points)

Une machine doit effectuer n tâches de façon séquentielle. Sachant que la durée d'exécution de chaque tâche est de p_j heures, formuler un programme en nombres entiers permettant de minimiser la somme pondérée des instants de début des tâches. Noter par w_j le poids associé à la tâche j .

3 _____ (20 points)

Résoudre le programme suivant par un algorithme d'énumération implicite.

$$\begin{aligned} \max_{x \in Z_+^2} \quad & 9x_1 + 5x_2 \\ & 4x_1 + 9x_2 \leq 35 \\ & x_1 \leq 6 \\ & x_1 - 3x_2 \geq 1 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 19 \end{aligned}$$

Illustrer géométriquement la progression de l'algorithme.

4 _____ (20 points)

Soit le problème de localisation caractérisé par la matrice de coûts de transport

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 4 & 10 & 2 & 6 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & 8 & 6 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

et le vecteur de coûts fixes

$$f = (4, 8, 11, 7, 5).$$

En partant du vecteur dual $u = (5, 6, 3, 2, 6, 4)$, évaluer la fonction duale $L(u)$ et obtenir une borne inférieure sur la valeur optimale. À partir du vecteur $(x(u), y(u))$, construisez une "bonne" solution primale. Pouvez-vous déterminer l'écart entre la valeur de cette solution et la valeur de la solution optimale?

Soit le problème de sac-à-dos:

$$\max \quad \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^n w_j x_j \leq k,$$

avec

$$\frac{c_1}{w_1} \geq \frac{c_2}{w_2} \geq \dots \geq \frac{c_n}{w_n}.$$

On peut résoudre ce problème récursivement à l'aide de l'équation de programmation dynamique

$$z(k) = \max_{j:w_j \leq k} \{c_j + z(k - w_j)\}.$$

- Soit $i(k)$ le plus petit indice pour lequel le minimum est atteint dans l'équation précédente. Démontrer l'identité

$$i(k) \leq i(k - w_{i(k)}).$$

- Soit m un entier tel que $i(k) = 1$ pour tout $k = n + 1, n + 2, \dots, n + \max\{w_j\}$. Démontrer qu'on a alors $i(k) = 1$ pour tout $k > n$.

Dans l'exemple vu en cours, déterminer la coupe de Gomory correspondant à la variable fractionnaire x_1 , à partir de l'équation

$$x_2 = \frac{9}{4} - \frac{9}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4,$$

puis trouver géométriquement la solution optimale du problème incluant la coupe.