

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL
DÉPARTEMENT D'INFORMATIQUE ET DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE
EXAMEN FINAL
IFT 3512 MODÈLES DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

Professeur : Patrice MARCOTTE

Date : Mardi 25 avril 2006

Heure : 8h30 à 11h30

Salle : Salle 1175, Pavillon André-Aisenstadt

AUCUNE DOCUMENTATION AUTORISÉE

LA CALCULATRICE EST NON SEULEMENT INUTILE, MAIS INTERDITE

RÈGLEMENT SUR LE PLAGIAT

(extrait du règlement disciplinaire sur le plagiat ou la fraude de l'Université)

Constitue un plagiat :

Faire exécuter son travail par un autre.
Utiliser, sans le mentionner, le travail d'autrui.
Échanger des informations lors d'un examen.

Le plagiat est passible de sanctions allant jusqu'à l'exclusion du programme.

1 _____ **(15 points)**

Vous devez choisir un certain nombre d'objets faisant partie d'un ensemble de cardinalité n . À l'aide de variables binaires, modéliser les contraintes suivantes :

1. Vous ne pouvez choisir tous les objets.
2. Vous devez choisir au moins un objet.
3. Les objets i et j ne peuvent être choisis simultanément.
4. L'objet i ne peut être choisi que si l'objet j est choisi.
5. Vous devez choisir soit au moins un objet du sous-ensemble $\{i, j, k\}$, soit au moins deux objets du sous-ensemble $\{s, t, u\}$

2 _____ **(15 points)**

Résoudre par énumération implicite ("Branch-and-Bound") le problème de sac-à-dos

$$\begin{aligned} \max \quad & 20x_1 + 24x_2 + 14x_3 + 3x_4 \\ & 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + x_4 \leq 10, \end{aligned}$$

où les variables x_1 et x_2 sont entières (positives ou nulles) et les variables x_3 et x_4 sont *binaires*.

3 _____ **(15 points)**

En résolvant la relaxation linéaire du programme en nombres entiers (positifs ou nuls)

$$\begin{aligned} \max \quad & 4x_1 - x_2 \\ & 7x_1 - 2x_2 \leq 14 \\ & x_2 \leq 3 \\ & 2x_1 - 2x_2 \leq 3 \end{aligned}$$

par la méthode du simplexe, on obtient une solution optimale dont l'une des variables de base est donnée, dans le dictionnaire (tableau) optimal, par l'équation

$$x_1 = \frac{20}{7} - \frac{1}{7}x_3 - \frac{2}{7}x_4$$

(x_3 et x_4 sont des variables d'écart). À partir de cette égalité, dériver une coupe de Gomory et l'illustrer géométriquement.

4 _____ **(25 points)**

Soit le programme mathématique

$$\min_{x \in X} x_1^2 + x_2^2,$$

où X est l'enveloppe convexe des points

$$(1, 2), (2, 1), (4, 1), (6, 2), (3, 4), (2, 3), (3, 3), (4, 2).$$

Trouver, à partir du point $(6, 2)$, les directions de descente associées aux algorithmes de Frank et Wolfe, de Zoutendijk et des deux versions du gradient projeté vues en cours. Ensuite, trouver la solution optimale du problème et démontrer qu'elle satisfait aux conditions d'optimalité de Kuhn et Tucker. Cette solution est-elle l'unique solution satisfaisant les conditions d'optimalité du premier ordre ?

1. Écrire le programme mathématique permettant de trouver la projection sur le polyèdre

$$\{x \geq 0 : \sum_{j=1}^n c_j x_j = 1\},$$

où les coefficients c_j sont tous strictement positifs.

2. Écrire les conditions d'optimalité de Kuhn et Tucker et en déduire une expression pour les variables x_j en fonction du multiplicateur y associé à l'unique contrainte (quelque chose comme $x_j = \max\{\cdot, \cdot\}$).
3. En reportant l'expression précédente dans la contrainte d'égalité, indiquer comment trouver le multiplicateur y et, par conséquent, la projection recherchée.

Soit la formulation suivante du problème de localisation :

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} + \sum_{j=1}^n f_j y_j \\ & \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad \forall i \\ & x_{ij} \leq y_j \quad \forall i, j \\ & x_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j \\ & y_j \in \{0, 1\} \quad \forall j. \end{aligned}$$

1. Écrire la relaxation lagrangienne correspondant à la dualisation des contraintes $x_{ij} \leq y_j$.
2. Comment vous y prendre pour résoudre le sous-problème correspondant à un vecteur de multiplicateurs y donné ?
3. La relaxation lagrangienne est en fait une relaxation linéaire où l'ensemble

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n x_{ij} &= 1 \quad \forall i \\ x_{ij} &\geq 0 \quad \forall i, j \end{aligned}$$

est remplacé par l'enveloppe convexe de ses points à coordonnées entières. Cette relaxation est donc en général plus forte que la relaxation linéaire. Montrer que, dans le cas présent, les deux relaxations sont équivalentes.

4. Si l'on intègre les contraintes de capacité

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \leq c_j \quad \forall j,$$

le résultat précédent est-il toujours valide ?