

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL
DÉPARTEMENT D'INFORMATIQUE ET DE
RECHERCHE OPÉRATIONNELLE
EXAMEN DE MI-SESSION

IFT 3512 TECHNIQUES D'OPTIMISATION II

Professeur : Patrice MARCOTTE

Date: Mardi 7 mars 2006
Heure: 8h30 à 10h30
Salles: Salle 1175, pavillon André Aisenstadt

AUCUNE DOCUMENTATION AUTORISÉE
LA CALCULATRICE EST NON SEULEMENT INUTILE, MAIS INTERDITE

RÈGLEMENT SUR LE PLAGIAT

(extrait du règlement disciplinaire sur le plagiat ou la fraude de l'Université)

Constitue un plagiat:

- Faire exécuter son travail par un autre.
- Utiliser, sans le mentionner, le travail d'autrui.
- Échanger des informations lors d'un examen.
- Falsifier des documents.

Le plagiat est passible de sanctions allant jusqu'à l'exclusion du programme.

1 _____ (20 points)

Trouver les points stationnaires de la fonction

$$2x^2 + xy + y^2 + yz + z^2 - 6x - 7y - 8z$$

et déterminer leur nature.

2 _____ (40 points)

Soit le programme mathématique

$$\begin{aligned} \max_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & c^t x \\ \text{sujet à} \quad & \|x\|^2 \leq 1. \end{aligned}$$

1. Écrire les conditions nécessaires d'optimalité de Kuhn et Tucker. Dans le cas présent, ces conditions sont-elles suffisantes pour garantir l'optimalité globale?
2. Résoudre le système de Kuhn-Tucker.
3. Illustrer géométriquement.
4. Écrire les conditions de Kuhn et Tucker correspondant au système

$$\begin{aligned} \max_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & c^t x \\ \text{sujet à} \quad & \|x\|^2 \leq 1 \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

5. Sous quelle condition la solution optimale se trouvera-t-elle à l'origine?
6. Pour $n = 2$, déterminer tous les cas de figure possibles (solution à l'origine, sur le quart de cercle, ou sur l'un des deux axes de coordonnées).
7. Sans effectuer aucun calcul, indiquer comment vous vous y prendriez pour résoudre le problème pour une valeur quelconque de n .

3 _____ (20 points)

Montrer que la méthode de Newton appliquée à la résolution de l'équation

$$x^2 - a = 0$$

converge quadratiquement vers une solution de cette équation.

4 _____ (20 points)

Quels sont les avantages et inconvénients respectifs de

- la méthode de la plus forte pente;
- la méthode de Newton;
- la méthode du gradient conjugué

pour la minimisation d'une fonction deux fois continûment différentiable?

5 _____ (20 points)

Soit X un ensemble convexe. Démontrer qu'un point x de X est extrémal si et seulement si l'ensemble $X - \{x\}$ est convexe.