

À remettre le 2 février 2011

1 \_\_\_\_\_ (15 points)

Déterminer les points stationnaires des fonctions

$$(i) \quad \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - 2x^2 - 4x$$

$$(ii) \quad -x_1 + x_1x_2^3 - 3x_2.$$

ainsi que leur nature respective.

2 \_\_\_\_\_ (10 points)

1. Calculer le hessien de la fonction  $x^2/y$ , et en déduire que cette fonction est convexe sur tout ensemble inclus dans l'orthant positif.
2. Soit  $f$  une fonction convexe et  $g$  une fonction concave dont les valeurs sont positives. Démontrer que la fonction  $f^2/g$  est convexe.

3 \_\_\_\_\_ (15 points)

Soit  $f$  une fonction de  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  dans  $B \subseteq \mathbb{R}$  et  $g$  une fonction monotone (croissante ou décroissante) de  $B$  dans  $\mathbb{R}$ . Prouver que si  $g \circ f$  possède un optimum (minimum ou maximum) local en  $x^0$  alors  $f$  possède également un optimum local en  $x^0$ . La réciproque est-elle vraie ?

4 \_\_\_\_\_ (15 points)

Étudier la convexité de la fonction  $x_1^2(x_2^2 - 1) - 5x_1 + 10x_2^2$  et exprimer son approximation de Taylor au second ordre dans le voisinage du point  $(2, 1)$ .

5 \_\_\_\_\_ (15 points)

Lesquelles de ces applications sont fermées?

$$A(x) = \{y : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$A(x) = \{y : x^y \leq 1\}$$

$$A(x) = \{y : \|y - x\| \leq 1\}$$

$$A(x) = \begin{cases} \{y : x^2 + y^2 \leq 1\} & \text{si } x \neq 0; \\ [-1, 0] & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

6 \_\_\_\_\_ (15 points)

Soit la fonction  $f(x, y) = (x - y^2)(x - 2y^2)$ . Montrer que l'origine  $(0, 0)$  est un point stationnaire de  $f$ , que toutes les droites passant par  $(0, 0)$  admettent un minimum local en  $(0, 0)$  mais que  $(0, 0)$  n'est pas un minimum local de  $f$ . Pouvez-vous expliquer ce "paradoxe"?

7 \_\_\_\_\_ (25 points)

Montrer comment trouver un point initial tel que la méthode de Newton cycle lors de la minimisation de la fonction convexe  $f(x) = \int_0^x \operatorname{tg}^{-1}(t) dt$ . **Bonus:** trouvez-le (approximativement)!