

À remettre le mercredi 5 avril 2011

1 \_\_\_\_\_ (70 points)

Soit

$$\begin{array}{ll} \min_{x \in X} & f(x) \\ \text{s.à} & g_i(x) \leq 0 \quad i \in I \end{array}$$

un programme non linéaire. Je rappelle que la fonction lagrangienne est

$$L(x, y) = f(x) + \sum_{i \in I} y_i g_i(x)$$

et la fonction duale

$$\phi(y) = \min_{x \in X} L(x, y).$$

On considère le programme de programmation linéaire

$$\begin{array}{ll} \min & -2x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 \\ \text{sujet à} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 8 \\ & x_1 - 2x_3 + 4x_4 \leq 2 \\ & x_1 + x_2 \leq 8 \\ & x_3 + 2x_4 \leq 6 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{array}$$

Soit  $X = \{x \geq 0 : x_1 + x_2 \leq 8, x_3 + 2x_4 \leq 6\}$ .

1. Trouver une expression explicite pour la fonction  $\phi$ .
2. Vérifier que  $\phi$  est différentiable au point  $(4, 0)$  et déterminer  $\nabla\phi(4, 0)$ .
3. Trouver une direction d'amélioration admissible  $d$  au point  $(4, 0)$ .
4. Maximiser  $\phi$  dans la direction  $d$ .

2 \_\_\_\_\_ (30 points)

Soit le programme quadratique

$$\begin{array}{ll} \min & x_1^2 + x_2^2 \\ \text{sujet à} & x_1 + x_2 \geq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{array}$$

1. Trouver la solution optimale.
2. Soit  $X = \{x \geq 0\}$ . Écrire la fonction lagrangienne et montrer que  $\phi(u) = -u^2/2 + 4u$ . Vérifier que le saut de dualité est nul.