

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL
DÉPARTEMENT D'INFORMATIQUE ET DE
RECHERCHE OPÉRATIONNELLE
EXAMEN DE MI-SESSION

IFT 3515 TECHNIQUES D'OPTIMISATION II

Professeur : Patrice MARCOTTE

Date: Mardi 21 février 2011
Heure: 9h30 à 11h30
Salles: Salle 1141, pavillon André Aisenstadt

DOCUMENTATION AUTORISÉE : UNE FEUILLE DE NOTES
LA CALCULATRICE EST NON SEULEMENT INUTILE, MAIS INTERDITE

RÈGLEMENT SUR LE PLAGIAT

(extrait du règlement disciplinaire sur le plagiat ou la fraude de l'Université)

Constitue un plagiat:

- Faire exécuter son travail par un autre.
- Utiliser, sans le mentionner, le travail d'autrui.
- Échanger des informations lors d'un examen.
- Falsifier des documents.

Le plagiat est passible de sanctions allant jusqu'à l'exclusion du programme.

1 _____ (25 points)

Pour des variables x et y non négatives, on considère la fonction

$$f(x) = 6 \ln(1 + x + y) - x^2 - y^2.$$

- Cette fonction est-elle convexe ou concave?
- Trouver un point stationnaire de cette fonction et en déterminer la nature.
- Effectuer une itération de la méthode de Newton à partir de l'origine.

2 _____ (25 points)

Soit le problème d'optimisation quadratique sans contraintes:

$$\min_x f(x) = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 - 4x_1 - 5x_2.$$

- Déterminer la solution optimale de ce problème.
- À partir du point $(3, 4)^t$, effectuer une itération de la méthode du gradient.
- Pouvez-vous expliquer pourquoi la méthode converge en une seule itération, par exemple à l'aide d'une illustration? **Bonus de 10 points:** Pouvez-vous généraliser ce résultat?
- Déterminer le taux de convergence de l'algorithme pour cet exemple, à partir d'un point de départ quelconque.

3 _____ (25 points)

Expliquer sur environ une demi-page (plus si vous le souhaitez), les avantages de la méthode de gradient conjugué par rapport aux méthodes de gradient et de Newton.

4 _____ (25 points)

On considère le problème d'optimisation

$$\begin{array}{ll} \min_x & u^t x \\ \text{sujet à} & x^t Q x \leq 1, \end{array}$$

où Q est une matrice définie positive.

- Écrire les conditions de Kuhn-Tucker. Ces conditions sont-elles suffisantes pour caractériser une solution optimale?
- Justifier le fait qu'à l'optimum, la contrainte est saturée.
- Montrer que la valeur optimale du problème est $\sqrt{u^t Q^{-1} u}$.
- En normalisant x , en déduire l'inégalité

$$(u^t x)^2 \leq (x^t Q x)(u^t Q^{-1} u).$$