

À remettre au début du cours du mardi 31 janvier 2012

1 _____ (20 points)

Déterminer si les fonctions suivantes sont convexes ou concaves:

- $f(x, y) = x^2 + 2xy - 10x + 5y$
- $f(x, y) = x \exp(-(x + y))$
- $f(x, y) = -x^2 - 5y^2 + 2xy + 10x - 10y$
- $f(x, y, z) = xy + 2x^2 + y^2 + 2z^2 - 6xz$
- $f(x, y, z) = -x^2 - 3y^2 - 2z^2 + 4xy + 2xz + 4yz$.

2 _____ (20 points)

Soit

$$h(x) = g(f(x)),$$

où les fonctions f et g sont convexes.

- Montrer que h n'est pas nécessairement convexe.
- Montrer que h est convexe si g est croissante.

3 _____ (20 points)

Soit

$$f(x) = x^t Ax$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & \theta \end{pmatrix}.$$

Pour quelles valeurs du paramètre θ la fonction f est-elle convexe?

Soit le problème d'optimisation sans contraintes

$$\min_{x,y} 5x^2 + 5y^2 - xy - 11x + 11y.$$

- Trouver un point satisfaisant les conditions nécessaires d'optimalité.
- Démontrer que ce point est un minimum global.
- Déterminer le taux de convergence de la méthode du gradient.
- À partir du point $(1, 1)$, estimer le nombre d'itérations maximal requis pour réduire l'erreur à 10^{-12} .

En se basant sur la valeur d'une fonction et de ses dérivés en deux points distincts, il est possible d'obtenir l'équation d'un polynôme de degré 3 possédant les mêmes valeurs de fonction et de dérivée. On peut alors déterminer un minimum (relatif) de cette fonction à l'aide d'une formule explicite (voir Luenberger pages 205–206), et qui mène à la relation suivante pour les termes d'erreur consécutifs:

$$r_{k+1} = M(r_k^2 r_{k-1} + r_k r_{k-1}^2).$$

Déterminer l'ordre de convergence de la méthode. Celle-ci est-elle préférable à la méthode de Newton?