

À remettre le 3 février 2015

1 \_\_\_\_\_ (15 points)

Soit la fonction  $f(x, y) = (x - y^2)(x - 2y^2)$ . Montrer que l'origine  $(0, 0)$  est un point stationnaire de  $f$ , que toutes les droites passant par  $(0, 0)$  admettent un minimum local en  $(0, 0)$  mais que  $(0, 0)$  n'est pas un minimum local de  $f$ . Pouvez-vous expliquer ce "paradoxe"?

2 \_\_\_\_\_ (15 points)

Pour des variables  $x$  et  $y$  non négatives, on considère la fonction

$$f(x, y) = 6 \log(1 + x + y) - x^2 - y^2.$$

- Cette fonction est-elle convexe ou concave?
- Trouver un point stationnaire de cette fonction et en déterminer la nature.
- Déterminer un point stationnaire par la méthode de Newton à partir de l'origine.

3 \_\_\_\_\_ (15 points)

Trouver les points stationnaires de la fonction

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2 + \beta xy + 2 + 2y$$

pour toutes les valeurs du paramètre  $\beta$  et déterminer leur nature.

4 \_\_\_\_\_ (15 points)

Soit  $\theta \in [0, 1]$ . Démontrer l'inégalité

$$\sqrt{\log(\theta e^{x^2} + (1 - \theta)e^{y^2})} \geq \theta x + (1 - \theta)y.$$

5 \_\_\_\_\_ (15 points)

Soit la suite définie récursivement par

$$x^+ = \frac{1}{2} \left( x + \frac{a}{x} \right).$$

- Pour quelles valeurs du paramètre  $a$  la suite converge-t-elle?
- Si la suite converge, déterminer l'ordre de convergence.

[inspiré de BSS, exercice 8.5 page 345]

Soit la fonction

$$f(x) = (x_1^3 + x_2)^2 + 2(x_2 - x_1 - 4)^4$$

et

$$\phi(t) = f(x + td).$$

- La fonction  $f$  est-elle convexe (concave)?
- Soit  $x = 0$  et  $d = (1, 1)^t$ . La fonction  $\phi$  est-elle convexe (concave)?
- Déterminer le gradient et le hessien de  $f$ .
- Soit  $x = (4, 5)^t$  et  $d = (1, -2)^t$ . Minimiser  $\phi(t)$  à l'aide des méthodes de Fibonacci et de la section dorée. Bien spécifier les bornes d'intervalle choisies ainsi que la précision souhaitée.