

PROBABILITÉS

Si X est une variable aléatoire non négative, alors:

$$\text{cas discret: } E[X] = \sum_{k=1}^{\infty} P\{X \geq k\}$$

$$\text{cas continu: } E[X] = \int_0^{\infty} P\{X \geq x\} dx$$

fonction indicatrice

$I(E) = 1$ si l'événement E se produit, et 0 sinon

probabilité totale

discret: $P\{X = n\} = \sum_k P\{X = n|Y = k\} P\{Y = k\}$

continu: $f_X(x) = \int f_{X|Y}(x|y)f_Y(y) dy$

espérance: $E[g(X)] = E_Y\{E_X[g(X)|Y = y]\}$

somme aléatoire

Soit $X = \sum_{i=1}^N X_i$ où les variables aléatoires X_i sont i.i.d. et indépendantes de la variable aléatoire N . On a:

$$E[X] = E[N] E[X_i]$$

$$\text{Var}[X] = E[N] \text{Var}[X_i] + \text{Var}[N] (E[X_i])^2$$

fonction génératrice: $\phi(s) = E[s^X]$

On a: $\phi^{(k)}(1) = E[X(X-1)\cdots(X-k+1)]$.

Si les variables aléatoires X_i sont indépendantes:

$$\phi(\sum_{i=1}^n X_i) = \prod_{i=1}^n \phi_{X_i}(s).$$

Si X est une variable discrète ($P\{X = k\} = p_k, k \geq 0$):

$$p_k = \phi^{(k)}(0)/k!.$$

CHAÎNES DE MARKOV STATIONNAIRES

matrice de transition

$$P_{ij} = P\{X_{n+1} = j | X_n = i\}$$

matrice de transition sur n étapes

$$P_{ij}^{(n)} = P\{X_{m+n} = j | X_m = i\} = [P^n]_{ij}$$

L'état j est **accessible** de i ($i \rightarrow j$) si $\exists n : P_{ij}^{(n)} > 0$.

Les états i et j sont **communicants** si $i \rightarrow j$ et $j \rightarrow i$ (on note $i \leftrightarrow j$). La relation de communication est une relation d'équivalence qui induit une partition des états en **classes**. Une chaîne est **irréductible** si tous les états appartiennent à la même classe.

probabilités limites

$\pi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{ij}^{(n)}$ lorsque la limite est bien définie.

probabilités stationnaires

$$\pi = \pi P \quad \sum \pi_i = 1 \quad \pi \geq 0$$

période: $d(i) = \text{PGCD}\{n : P_{ii}^{(n)} > 0\}$

premier retour: $R_i \stackrel{\text{def}}{=} \min\{n \geq 1 : X_n = i | X_0 = i\}$

$$f_{ii}^{(n)} \stackrel{\text{def}}{=} P\{R_i = n\}$$

$$f_{ii} \stackrel{\text{def}}{=} P\{\text{retour en } i\} = \sum_{n=0}^{\infty} f_{ii}^{(n)}$$

On pose $m_i \stackrel{\text{def}}{=} E[R_i] = \sum_{n=0}^{\infty} n f_{ii}^{(n)}$.

On peut obtenir récursivement les probabilités de premier retour à partir de la relation:

$$P_{ii}^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} f_{ii}^{(k)} P_{ii}^{(n-k)}.$$

retours: Soit M_i le nombre de retours en i ($X_0 = i$).

$$P\{M_i \geq k | X_0 = i\} = (f_{ii})^k \quad E[M_i] = f_{ii}/(1 - f_{ii}).$$

classification des états

- **absorbant:** $P_{ij} = \delta_{ij}$
- **périodique:** $d(i) > 1$ (propriété de classe)
- **apériodique:** $d(i) = 1$
- **récurent:** $f_{ii} = 1$ (propriété de classe)
- **récurent positif:** récurent et $E[R_i] < \infty$ (propriété de classe, équivalent à récurent si le nombre d'états est fini)
- **récurent nul:** récurent et $E[R_i] = \infty$ (propriété de classe)
- **transient:** non récurent: $f_{ii} < 1$
- **ergodique:** apériodique et récurent positif

théorème fondamental: Pour toute chaîne irréductible, récurrente et apériodique, on a:

$$\forall j : \quad \pi_i = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{ji}^{(n)} = 1 / \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^{(n)} = 1/m_i.$$

(Si le nombre d'états est fini, l'hypothèse de récurrence découle de l'irréductibilité.) Si de plus la chaîne est ergodique (ses états sont récurrents *positifs*), alors les probabilités limites correspondent à une loi de probabilité: $\sum_i \pi_i = 1$.

chaîne absorbante

États transients: 0 à $r-1$. États absorbants: r à N .

La matrice de transition peut s'écrire $P = \begin{pmatrix} Q & R \\ 0 & I \end{pmatrix}$ où $Q : r \times r$, $R : r \times (N-r+1)$, $0 : (N-r+1) \times r$ et $I : (N-r+1) \times (N-r+1)$.

Soit $T = \min\{n : X_n \geq r\}$ et $U_{ik} = P\{X_T = k | X_0 = i\}$. On a, par une **analyse sur une étape:** $U = R + QU$ (la **matrice fondamentale** $I-Q$ est inversible sous certaines conditions).

Soit $g = (g(i))_{i=0}^{r-1}$ un **vecteur de gains** associés aux états transients et $w_i \stackrel{\text{def}}{=} E[\sum_{n=0}^{T-1} g(X_n) | X_0 = i]$. On a:

$$w = g + Qw.$$

Si $g(i) = \delta_{ik}$, on obtient le nombre moyen de visites à l'état k . Si $g(i) = 1$ pour tout i , on obtient $w_i = E[T]$ pour tout i .

processus de ramification

Soit X_n la taille d'une population à la période n . On a la relation

$$X_{n+1} = \xi_1^{(n)} + \dots + \xi_{X_n}^{(n)}$$

où les variables $\xi_j^{(n)}$ sont des variables i.i.d. de fonction de masse $P\{\xi = k\} = p_k$.

On pose: $X_0 = 1$, $\mu = E[\xi]$ et $\sigma^2 = \text{Var}[\xi]$.

Soit $M(n) \stackrel{\text{def}}{=} E[X_n]$ et $V(n) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Var}[X_n]$. On pose $M(0) = 1$ et $V(0) = 0$ et on établit les relations de récurrence:

$$\begin{aligned} M(n) &= \mu M(n-1) = \mu^n \\ V(n) &= \sigma^2 M(n-1) + \mu^2 V(n-1) \\ &= \sigma^2 \mu^n \times \begin{cases} n & \text{si } \mu = 1 \\ \frac{1-\mu^n}{1-\mu} & \text{si } \mu \neq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Soit N l'instant d'extinction de la population et $u_n \stackrel{\text{def}}{=} P\{N \leq n\} = P\{X_n = 0\}$. On a l'équation de récurrence:

$$u_n = \sum_{k=0}^{\infty} p_k (u_{n-1})^k = \phi(u_{n-1})$$

avec les conditions initiales $u_0 = 0$ et $u_1 = p_0$. Asymptotiquement, $u_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ représente la probabilité que la population s'éteigne; u_∞ est un **point fixe** de l'équation $u = \phi(u)$. Cette équation possède la solution triviale $u = 1$. Si $\phi'(1) = E[\xi] \leq 1$, l'équation ne possède que cette solution triviale, et la population s'éteindra avec probabilité 1. Si $\phi'(1) > 1$, il existe une racine u^* inférieure à 1, et la probabilité que la population ne s'éteigne jamais, qui est non nulle, est égale à $1 - u^*$.

PROCESSUS DE DÉCISION MARKOVIENS

Les probabilités de transition P_{ij}^k dépendent d'une décision k prise lorsque le processus est dans l'état i ($i \in [0..N]$). Un revenu R_i^k est associé à tout couple (i, k) . Une **politique** est une fonction δ qui associe à chaque état i et chaque instant n une décision $\delta(i, n)$ appartenant à un ensemble $D(i, n)$.

horizon de planification n^* fini

Une politique optimale et les gains optimaux v_i^n peuvent être obtenus en résolvant récursivement les équations de la **programmation dynamique**:

$$\begin{aligned} v_i^n &= 0 \\ v_i^n &= \max_{k \in D(i, n)} \left\{ R_i^k + \sum_{j=0}^N P_{ij}^k v_j^{n+1} \right\} \quad i = 0, \dots, N. \end{aligned}$$

On peut facilement généraliser à la situation où le revenu R_i^k dépend de n .

horizon infini (revenus actualisés)

Le revenu à l'instant n est multiplié par α^n , où $\alpha \in (0, 1)$ est le **taux d'actualisation**. Soit $m = \min_{i,k} \{R_i^k\}$ et $M = \max_{i,k} \{R_i^k\}$. Le revenu total actualisé appartient à

l'intervalle $[m/(1-\alpha), M/(1-\alpha)]$. Soit $D(i, n) = D(i)$; on peut alors démontrer qu'il existe une politique optimale **stationnaire** et **déterministe** $\delta = (\delta(i))_i$.

Soit $V^\delta(n)$ le vecteur des revenus espérés actualisés correspondant à une politique stationnaire δ utilisée pendant n étapes, et P^δ la matrice de transition correspondante. Un raisonnement sur une étape nous donne:

$$V^\delta(n) = R^\delta + \alpha P^\delta V^\delta(n-1).$$

En passant à la limite:

$$v^\delta \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} V^\delta(n) = (I - \alpha P^\delta)^{-1} R^\delta.$$

On peut ainsi déterminer une stratégie optimale par énumération et comparaison de leurs gains moyens respectifs.

Une méthode plus efficace, basée sur la relation:

$$R^{\delta'} + \alpha P^{\delta'} v^\delta \left\{ \begin{array}{l} \geq \\ \leq \end{array} \right\} v^\delta \implies v^{\delta'} \left\{ \begin{array}{l} \geq \\ \leq \end{array} \right\} v^\delta,$$

mène à l'algorithme d'**amélioration des politiques**, dont une itération est décrite ci-dessous.

- $v^\delta \leftarrow (I - \alpha P^\delta)^{-1} R^\delta$
- $\forall i \in [0..N] : K_i = \arg \max_{k \in D(i)} \{R_i^k + \alpha \sum_{j=0}^N P_{ij}^k v_j^\delta\}$
- **si** $\delta(i) \in K_i \quad \forall i \in [0..N]$ alors STOP
sinon $\delta(i) \leftarrow \rho(i) \in K_i \quad \forall i \in [0..N]$

Puisque le nombre de politiques stationnaires est fini et que le revenu augmente strictement à chaque itération, l'algorithme converge en un nombre fini d'itérations.

On remarque que le revenu v^* associé à une politique optimale est l'unique solution de l'équation fonctionnelle:

$$v_i = \max_{k \in D(i)} \left\{ R_i^k + \sum_{j=0}^N \alpha P_{ij}^k v_j \right\} \quad \forall i \in [0..N].$$

La solution de cette équation peut être obtenue en résolvant le programme linéaire:

$$\begin{aligned} \min_w & \sum_{i=0}^N w_i \\ w_i - \alpha \sum_{j=0}^N P_{ij}^k w_j & \geq R_i^k \quad \forall k \in D(i) \quad \forall i \in [0..N]. \end{aligned}$$

Comme ce programme contient un grand nombre de contraintes, on peut lui préférer son dual:

$$\begin{aligned} \max_x & \sum_{i=0}^N \sum_{k \in D(i)} R_i^k x_i^k \\ \sum_{k \in D(i)} x_i^k - \alpha \sum_{j=0}^N \sum_{k \in D(j)} P_{ji}^k x_j^k & = 1 \quad \forall i \in [0..N] \\ x_i^k & \geq 0 \quad \forall i \in [0..N] \quad \forall k \in D(i), \end{aligned}$$

dont les solutions extrémales sont en correspondance bi-univoque avec les politiques: $x_i^k > 0$ si et seulement si $\delta(i) = k$. L'algorithme d'amélioration des politiques est équivalent à un algorithme de type "simplexe" où l'on effectue plusieurs pivots simultanément. Puisqu'il y a amélioration *stricte* à chaque itération, l'algorithme du simplexe ne peut cycler.

On peut également résoudre l'équation fonctionnelle par **approximations successives**:

$$v_i^n = \max_{k \in D(i)} \{R_i^k + \alpha \sum_{j=0}^N P_{ij}^k v_j^{n-1}\} \quad \forall i \in [0..N].$$

Soit $\|x\| = \max_i \{|x_i|\}$. On démontre que $\|v^n - v^*\| \leq \alpha \|v^{n-1} - v^*\|$, ce qui implique que la suite $\{v^n\}$ converge géométriquement vers v^* . Les politiques sont mises à jour à chaque itération par l'intégration de l'indice k pour lequel le maximum est atteint. Noter que la convergence des gains n'est pas finie, bien qu'une politique optimale soit obtenue après un nombre fini d'itérations!

horizon infini (revenu moyen)

Nous ne traiterons que du cas où les chaînes de Markov induites par les matrices de transition P^δ sont ergodiques. On peut alors montrer qu'il existe une politique stationnaire optimale. Pour déterminer une politique optimale, il suffit alors de comparer les revenus moyens $\pi^\delta R^\delta$, où π^δ est le vecteur de probabilités limites associé à la politique δ .

Élargissons maintenant l'espace des politiques aux **politiques aléatoires**:

$$\delta(i, k) = P\{\text{décision} = k | \text{état} = i\}.$$

On peut associer à chaque politique aléatoire une chaîne de Markov ergodique dont les probabilités limites sont π_i^δ . Soit y_{ik}^δ la probabilité limite que le processus se trouve en l'état i et que la décision $k \in D(i)$ soit prise. Puisque l'état où l'on se trouve et la décision sont des phénomènes indépendants, on a:

$$\begin{aligned} y_{ik}^\delta &= \pi_i^\delta \delta(i, k) \\ \pi_i^\delta &= \sum_{k \in D(i)} y_{ik}^\delta \quad (\text{probabilité totale}) \\ \implies \delta(i, k) &= \frac{y_{ik}^\delta}{\sum_{k \in D(i)} y_{ik}^\delta}. \end{aligned}$$

Le fait que π^δ soit un vecteur de probabilités induit des contraintes sur les probabilités y_{ik}^δ :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^N \pi_i^\delta = 1 &\implies \sum_{i=0}^N \sum_{d \in D(i)} y_{id}^\delta = 1 \\ \pi_j^\delta = \sum_{i=0}^N \pi_i^\delta P_{ij}^\delta &\implies \sum_{k \in D(i)} y_{jk}^\delta = \sum_{i=0}^N \sum_{k \in D(i)} y_{ik}^\delta P_{ij}^k. \end{aligned}$$

Le revenu moyen peut s'écrire:

$$\sum_{i=0}^N \sum_{k \in D(i)} \pi_i^\delta \delta(i, k) R_i^k = \sum_{i=0}^N \sum_{k \in D(i)} R_i^k y_{ik}^\delta.$$

La maximisation du revenu moyen se fait en résolvant le programme linéaire:

$$\begin{aligned} \max_y \quad & \sum_{i=0}^N \sum_{k \in D(i)} y_{ik} R_i^k \\ & \sum_{i=0}^N \sum_{k \in D(i)} y_{ik} = 1 \\ & \sum_{k \in D(i)} y_{ik} - \sum_{j=0}^N \sum_{k \in D(j)} y_{jk} P_{ji}^k = 0 \quad \forall i \in [0..N] \\ & y_{ik} \geq 0 \quad \forall i \in [0..N] \quad \forall k \in D(i). \end{aligned}$$

Une solution de base de ce programme linéaire correspond à une stratégie déterministe: $y_{ik} > 0 \iff \delta(i) = k$.

PROCESSUS DE POISSON

processus de Poisson homogène

Soit $X(t)$ le nombre d'événements observés jusqu'à l'instant t et $N(a, b)$ le nombre d'événements observés dans un intervalle de temps (a, b) . On note t_i l'instant où se produit l'événement i . Un processus de Poisson homogène est caractérisé par les axiomes suivants:

- si (a, b) et (c, d) sont des intervalles disjoints, les variables aléatoires $N(a, b)$ et $N(c, d)$ sont indépendantes
- $N(t, t+h)$ dépend de h mais pas de t
- $P\{N(t, t+h) \geq 1\} = \lambda h + o(h)$
- $P\{N(t, t+h) \geq 2\} = o(h)$.

On déduit de ces axiomes que $X(t) - X(s)$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda(t-s)$:

$$P\{X(t) - X(s) = k\} = P\{X(t-s) = k\} = e^{-\lambda(t-s)} \frac{[\lambda(t-s)]^k}{k!}.$$

Le **temps d'attente** W_1 avant le premier événement est une variable aléatoire de loi exponentielle; le **temps d'attente** W_n avant le n ème événement est une variable aléatoire de loi $\Gamma(\lambda, n)$, dont la fonction de densité est:

$$f_{W_n}(t) = \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Les **durées de séjour** (intervalles entre deux événements consécutifs) suivent une loi exponentielle de paramètre λ .

Si l'on sait qu'exactly n événements se sont produits avant l'instant t , alors la répartition des n événements

dans l'intervalle $(0, t)$ correspond à celle de n variables aléatoires indépendantes uniformes ordonnées. Plus précisément:

$$f_{W_1, \dots, W_n | X(t)=n}(w_1, \dots, w_n) = n! t^{-n}.$$

On a également la relation suivante avec la loi binomiale ($u < t$):

$$P\{X(u) = k | X(t) = n\} = \binom{n}{k} \left(\frac{u}{t}\right)^k \left(1 - \frac{u}{t}\right)^{n-k}.$$

processus de Poisson composé

Soit Y_k une variable aléatoire associée à l'événement k , d'espérance ν . On suppose que ces variables sont i.i.d.. Par exemple, Y_k peut représenter une variable aléatoire de Bernoulli qui prend la valeur "1" (avec probabilité p) si l'événement est un succès. On peut alors considérer les processus $X_1(t) = \sum_{k=1}^{X(t)} Y_k$ et $X_0(t) = X(t) - X_1(t)$ correspondant au nombre de succès et d'échecs, respectivement. Ces deux processus sont des processus de Poisson indépendants (!) d'intensités respectives λp et $\lambda(1-p)$.

Si Y_k correspond à la durée de vie d'un organisme k né à l'instant t_k , on peut s'intéresser au processus $M(t)$, le nombre d'organismes en vie à l'instant t . Soit p la probabilité qu'un organisme dont la date de naissance est uniformément répartie sur l'intervalle $[0, t]$ soit encore en vie à l'instant t , et G la loi de répartition de Y_k . On a:

$$\begin{aligned} p &= P\{U[0, t] + Y_k \geq t\} = \int_0^t \int_{t-u}^{\infty} \frac{1}{t} dG(y) du \\ &= \frac{1}{t} \int_0^t [1 - G(u)] du. \end{aligned}$$

En appliquant la loi de probabilité totale, on obtient:

$$\begin{aligned} P\{M(t) = m\} &= \sum_{n \geq m} P\{M(t) = m | X(t) = n\} P\{X(t) = n\} \\ &= \sum_{n \geq m} \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \\ &= e^{-\lambda p t} (\lambda p t)^m / m! \quad . \end{aligned}$$

Lorsque $t \rightarrow \infty$, $p t \rightarrow \nu$ et on obtient les probabilités limite:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P\{M(t) = m\} = e^{-\lambda \nu} (\lambda \nu)^m / m! \quad .$$

processus de Poisson non homogène

Soit $\lambda(t)$ le taux du processus. On a que $X(t) - X(s)$ suit une loi de Poisson de paramètre $\int_s^t \lambda(u) du$.

CHAÎNES DE MARKOV CONTINUES

cas fini (états 0 à N)

Le futur ne dépend pas du passé:

$$\begin{aligned} P\{X(t+s) = j | X(t) = i, X(u) = k(u), 0 \leq u < t\} \\ = P\{X(t+s) = j | X(t) = i\}. \end{aligned}$$

On ne s'intéressera qu'au cas **stationnaire** où les probabilités de transition sont indépendantes de l'instant présent s :

$$P_{ij}(t) \stackrel{\text{def}}{=} P\{X(s+t) = j | X(s) = i\}.$$

On démontre que l'intervalle entre deux transitions suit une loi exponentielle, dont nous notons le paramètre μ_i . On démontre que: $\mu_i \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} (1 - P_{ii}(h))/h$ (la limite existe) et on pose (les limites existent):

$$q_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} (P_{ij}(h))/h.$$

Le nombre q_{ij} est le taux de transition de i vers j et $\mu_i \stackrel{\text{def}}{=} \sum_j q_{ij}$. Plus précisément:

$$\begin{aligned} P\{X(t+h) = j | X(t) = i\} &= q_{ij} h + o(h) \quad i \neq j \\ P\{X(t+h) = i | X(t) = i\} &= 1 - \mu_i h + o(h). \end{aligned}$$

On définit le **générateur infinitésimal** du processus:

$$A = \begin{pmatrix} -\mu_0 & q_{01} & \dots & q_{0N} \\ q_{10} & -\mu_1 & \dots & q_{1N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{N0} & q_{N1} & \dots & -\mu_N \end{pmatrix}.$$

Soit $P(t) = (P_{ij}(t))_{ij}$. On a, par la propriété de Markov:

$$P(t+s) = P(t)P(s).$$

On a:

$$\begin{aligned} \frac{P(t+h) - P(t)}{h} &= P(t) \frac{P(h) - I}{h} \\ &= \frac{P(h) - I}{h} P(t). \end{aligned}$$

En passant à la limite, on obtient les équations de **Chapman-Kolmogorov** (vers l'avant et vers l'arrière):

$$P'(t) = P(t)A = AP(t) \quad (P(0) = I),$$

dont la solution formelle est:

$$P(t) = e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n.$$

Le vecteur des probabilités limites, s'il existe, est le vecteur de probabilités stationnaires obtenu en résolvant le système linéaire:

$$\pi A = 0 \quad \sum \pi_k = 1.$$

chaîne de Markov à deux états

Le générateur infinitésimal est:

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha \\ \beta & -\beta \end{pmatrix}.$$

Les équations de Chapman-Kolmogorov vers l'avant sont:

$$P'_{00}(t) = -\alpha P_{00}(t) + \beta P_{01}(t).$$

Puisque $P_{00}(t) + P_{01}(t) = 1$, on en déduit:

$$P'_{00}(t) = \beta - (\alpha + \beta)P_{00}(t)$$

dont la solution mène à:

$$\begin{aligned} P_{00}(t) &= (1 - \pi) + \pi e^{-\tau t} \\ P_{01}(t) &= \pi - \pi e^{-\tau t} \\ P_{10}(t) &= (1 - \pi) - (1 - \pi)e^{-\tau t} \\ P_{11}(t) &= \pi + (1 - \pi)e^{-\tau t} \end{aligned}$$

où $\pi = \alpha/(\alpha + \beta)$ et $\tau = \alpha + \beta$, et d'où l'on tire les probabilités limites $\pi_0 = 1 - \pi$ et $\pi_1 = \pi$.

processus de naissance

Un processus de naissance est un processus de Poisson où $X(0) = 0$ et où l'intensité λ_k du processus dépend de la taille k de la "population", comme dans le processus de ramification vu auparavant. Les **durées de séjour** S_k (intervalles entre les naissances k et $k + 1$) suivent une loi exponentielle de paramètre λ_k . On pose:

$$P_n(t) \stackrel{\text{def}}{=} P\{X(t) = n | X(0) = 1\} = P_{0n}(t).$$

On déduit de cette définition:

$$P_n(t) = P\left\{\sum_{i=0}^{n-1} S_i \leq t < \sum_{i=0}^n S_i\right\} = P\{W_n \leq t < W_{n+1}\}.$$

Les équations de Chapman-Kolmogorov vers l'arrière prennent la forme ($P_n(0) = \delta_{0n}$):

$$\begin{aligned} P'_n(t) &= -\lambda_n P_n(t) + \lambda_{n-1} P_{n-1}(t) \quad n > 0 \\ P'_0(t) &= -\lambda_0 P_0(t), \end{aligned}$$

d'où l'on tire la relation de récurrence:

$$P_n(t) = \lambda_{n-1} e^{-\lambda_n t} \int_0^t e^{\lambda_n x} P_{n-1}(x) dx.$$

Si le taux de croissance de la population est trop élevé, il y a une probabilité non nulle que la population atteigne une taille infinie en temps *fini*. Une condition nécessaire et suffisante pour que cette situation ne se produise pas est que les intervalles entre deux naissances ne soient pas trop rapprochés. Plus précisément:

$$P_\infty(t) = 0 \iff \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) = 1 \iff \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} = \infty.$$

Si les taux λ_k sont tous distincts, la solution du système d'équations différentielles est donnée par:

$$P_n(t) = \left(\prod_{k=0}^{n-1} \lambda_k\right) \left(\sum_{k=0}^n B_{kn} e^{-\lambda_k t}\right)$$

où $B_{kn} = \left(\prod_{i=0(i \neq k)}^n (\lambda_i - \lambda_k)\right)^{-1}$. Un **processus de Yule** est un processus de naissance où $X(0) = 1$ et où le taux de naissance est proportionnel à la taille de la population: $\lambda_n = \beta n$. On en déduit l'équation différentielle de récurrence:

$$P'_n(t) = -\beta[nP_n(t) - (n-1)P_{n-1}(t)]$$

dont la solution analytique (c'est-à-dire explicite)

$$P_n(t) = e^{-\beta t} (1 - e^{-\beta t})^{n-1}$$

correspond à une loi géométrique de paramètre $\exp(-\beta t)$.

processus de mort

Un processus de mort est caractérisé par la taille de la population initiale ($X(0) = N$) et par les taux de mortalité μ_k d'une population de taille k (par convention, on pose $\mu_0 = 0$). Plus précisément, pour tout $k \in [1..N]$:

$$\begin{aligned} P\{X(t+h) = k-1 | X(t) = k\} &= \mu_k h + o(h) \\ P\{X(t+h) = k | X(t) = k\} &= 1 - \mu_k h + o(h) \\ P\{X(t+h) > k | X(t) = k\} &= 0. \end{aligned}$$

Si les taux de mortalité sont tous distincts, on obtient la forme explicite:

$$P_n(t) = \left(\prod_{k=n+1}^N \mu_k\right) \left(\sum_{k=n}^N A_{kn} e^{-\mu_k t}\right)$$

où $A_{kn} = \left(\prod_{i=n(i \neq N)}^N (\mu_i - \mu_k)\right)^{-1}$. Dans le cas où le taux de mortalité est proportionnel à la taille de la population ("dual" du processus de Yule), c'est-à-dire $\mu_k = \alpha k$, on obtient:

$$P_n(t) = \binom{N}{n} e^{-n\alpha t} (1 - e^{-\alpha t})^{N-n},$$

qui correspond à une loi binomiale de paramètres N et $\exp(-\alpha t)$. On en déduit la fonction de répartition de l'**instant d'extinction** T de la population:

$$F_T(t) = P_0(t) = (1 - e^{-\alpha t})^N.$$

On peut faire l'analogie avec les décès d'individus dans une population où les durées de vie ξ_i sont exponentielles de paramètre α . L'instant du premier décès S_N satisfait alors

$$P\{S_N > t\} = P\{\min\{\xi_1, \dots, \xi_N\} > t\} = e^{-N\alpha t}.$$

De façon générale, le temps passé en l'état k (taille de la population) suit une loi exponentielle de paramètre $k\alpha$.

processus de naissance et de mort

On combine un taux de naissance λ_k à un taux de décès μ_k ($\mu_0 = \lambda_{-1} = 0$). Les données du processus peuvent être intégrées dans le générateur infinitésimal tridiagonal:

$$A = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \dots \\ \mu_1 & -(\lambda_1 + \mu_1) & \lambda_1 & 0 & \dots \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2 + \mu_2) & \lambda_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Soit S_k la durée de séjour dans l'état k . On a:

$$G_i(t) \stackrel{\text{def}}{=} P\{S_i \geq t\} = e^{-(\lambda_i + \mu_i)t}$$

Les équations de Chapman-Kolmogorov (vers l'arrière) s'expriment comme:

$$\begin{aligned} P_{ij}(0) &= \delta_{ij} \\ P'_{ij}(t) &= \mu_i P_{i-1,j}(t) - (\lambda_i + \mu_i) P_{ij}(t) + \lambda_i P_{i+1,j}(t). \end{aligned}$$

Symétriquement, on obtient les équations de Chapman-Kolmogorov vers l'avant:

$$\begin{aligned} P_{ij}(0) &= \delta_{ij} \\ P'_{ij}(t) &= \lambda_{j-1} P_{i,j-1}(t) - (\lambda_j + \mu_j) P_{ij}(t) + \mu_{j+1} P_{i,j+1}(t). \end{aligned}$$

Dans le cas d'une croissance linéaire avec immigration, on a: $\lambda_n = n\lambda + a$ et $\mu_n = n\mu$. Les équations de Chapman-Kolmogorov vers l'avant sont:

$$P'_{ij}(t) = [\lambda(j-1) + a] P_{i,j-1}(t) - [(\lambda + \mu)j + a] P_{ij}(t) + \mu(j+1) P_{i,j+1}(t).$$

Soit $M(t) \stackrel{\text{def}}{=} E[X(t)] = \sum_{j=1}^{\infty} j P_{ij}(t)$ ($M(0) = X(0) = i$). On déduit des équations de Chapman-Kolmogorov l'équation différentielle $M'(t) = a + (\lambda - \mu)M(t)$, dont la solution analytique est:

$$M(t) = \begin{cases} \frac{a}{\lambda - \mu} [e^{(\lambda - \mu)t} - 1] + ie^{(\lambda - \mu)t} & \text{si } \lambda \neq \mu \\ at + i & \text{si } \lambda = \mu. \end{cases}$$

La variance peut être calculée similairement. Si $\lambda < \mu$, on a: $\lim_{t \rightarrow \infty} = a/(\mu - \lambda)$, indépendamment de i .

comportement asymptotique

Si la distribution limite des $P_{ij}(t)$ existe, alors elle est stationnaire:

$$\pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i P_{ij}(t).$$

À la limite, les dérivées dans les équations de Chapman-Kolmogorov (vers l'avant) doivent s'annuler. On en déduit les équations d'équilibre ($\pi A = 0$):

$$\begin{aligned} 0 &= -\lambda_0 \pi_0 + \mu_1 \pi_1 \\ 0 &= \lambda_{j-1} \pi_{j-1} - (\lambda_j + \mu_j) \pi_j + \mu_{j+1} \pi_{j+1}. \end{aligned}$$

Ces équations ont une interprétation intuitive: les taux d'entrée et de sortie doivent s'équilibrer, ce qui donne:

$$\pi_j = \lambda_{j-1} \pi_{j-1} + \mu_{j+1} \pi_{j+1} + (1 - \lambda_j - \mu_j) \pi_j,$$

qui est identique à l'équation précédente. La solution de ce système:

$$\pi_0 = 1 / \sum_{k=0}^{\infty} \theta_k \quad \pi_j = \pi_0 \theta_j \quad \forall j \geq 0$$

est obtenue à l'aide des quantités auxiliaires:

$$\theta_0 = 1; \quad \theta_k = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_k} = \left(\prod_{j=0}^{k-1} \lambda_j \right) / \left(\prod_{j=1}^k \mu_j \right).$$

PROCESSUS DE RENOUVELLEMENT

Un processus de renouvellement est un processus stochastique qui, à des instants particuliers, se retrouve dans un état que l'on ne peut distinguer de l'état initial. On peut considérer par exemple le remplacement, lorsqu'elle est brûlée, d'une ampoule par une ampoule aux caractéristiques identiques. On suppose que les durées de vie X_k sont i.i.d. de loi de répartition F et de moyenne μ .

Le temps d'attente jusqu'à la n ème panne est noté, comme auparavant, W_n ($W_n = \sum_{k=1}^n X_k$). Si F_n dénote la n ème convolution de la fonction de répartition F , on a:

$$\begin{aligned} P\{W_n \leq x\} &= F_n(x) = \int_0^x F_{n-1}(x-y) dF(y) \\ &= \int_0^x F_{n-1}(x-y) dF(y). \end{aligned}$$

On dénote par $N(t)$ le nombre de pannes jusqu'à l'instant t . On a:

$$N(t) \geq k \iff W_k \leq t.$$

On définit la **fonction de renouvellement**:

$$\begin{aligned} M(t) \stackrel{\text{def}}{=} E[N(t)] &= \sum_{k=1}^{\infty} P\{N(t) \geq k\} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} P\{W_k \leq t\} = \sum_{k=1}^{\infty} F_k(t). \end{aligned}$$

théorème élémentaire du renouvellement

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{M(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E[N(t)]}{t} = \frac{1}{\mu}$$

Dans le cas continu, et si la variance σ^2 existe et n'est pas nulle, on a:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (M(t) - t/\mu) = (\sigma^2 - \mu^2)/2\mu^2.$$

durée de vie résiduelle: $\gamma_t = W_{N(t)+1} - t$

âge: $\delta_t = t - W_{N(t)}$

durée de vie: $\beta_t = \gamma_t + \delta_t$

Puisque le nombre d'événements (pannes) $N(t)$ et les durées de vie X_k ne sont pas indépendants, il est faux d'affirmer que $E[W_{N(t)}] = \mu M(t)$, où $\mu = E[X_k]$. Il est donc étonnant que la formule suivante soit correcte:

$$E[W_{N(t)+1}] = \mu[M(t) + 1].$$

chaîne de Markov: le nombre de transitions entre deux passages à un état i induit un processus de renouvellement, où $X_0 = i$, $W_0 = 0$ et:

$$W_{k+1} = \min\{n > W_k : X_n = i\}.$$

remplacement en bloc

Soit X la durée de vie d'une ampoule, $P\{X = k\} = p_k$ et $M(n) = E[N(n)]$. Une politique de remplacement en bloc consiste à remplacer une ampoule lorsqu'elle est brûlée, et à remplacer *toutes* les ampoules du système à chaque K périodes. Soit c_2 le coût de remplacement imprévu d'une ampoule et c_1 le coût de remplacement préventif (coût unitaire $c_1 < c_2$). On cherche à minimiser le coût moyen de remplacement par période:

$$\min_K \theta(K) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{c_1 + c_2 M(K-1)}{K},$$

où M est définie récursivement par la formule:

$$\begin{aligned} M(n) &= \sum_{k=n+1}^{\infty} (p_k \times 0) + \sum_{k=1}^n p_k [1 + M(n-k)] \\ &= F(n) + \sum_{k=1}^{n-1} p_k M(n-k) \text{ puisque } M(0) = 0. \end{aligned}$$

remplacement basé sur l'âge

On remplace une ampoule si elle est brûlée où lorsque son âge atteint T . La probabilité d'une panne est $F(T)$ et la probabilité d'un remplacement planifié est $1 - F(T)$. La loi de répartition de la durée de vie avant remplacement est une loi tronquée:

$$F_T(x) = \begin{cases} F(x) & \text{si } x < T \\ 1 & \text{si } x \geq T. \end{cases}$$

La durée moyenne de vie avant remplacement (préventif ou non) est:

$$\mu_T = \int_0^{\infty} (1 - F_T(x)) dx = \int_0^T (1 - F(x)) dx < \mu.$$

Soit Y l'intervalle entre 2 pannes et N le nombre de remplacements préventifs entre deux pannes. On a:

$$Y = NT + Z$$

$$\text{où } P\{N \geq k\} = \{1 - F(T)\}^k \quad k = 0, 1, \dots$$

$$\text{et } P\{Z \leq z\} = F(z)/F(T) \quad \text{si } 0 \leq z \leq T.$$

Maintenant:

$$\begin{aligned} E[Y] &= E[NT + Z] = TE[N] + E[Z] \\ &= T \sum_{k=1}^{\infty} P\{N \geq k\} + \int_0^{\infty} P\{Z \geq z\} dz \\ &= T \frac{1 - F(T)}{F(T)} + \int_0^T \left(1 - \frac{F(z)}{F(T)}\right) dz \\ &= \frac{1}{F(T)} [T(1 - F(T)) + \int_0^T (F(T) - F(z)) dz] \\ &= \frac{1}{F(T)} \int_0^T (1 - F(z)) dz = \frac{\mu_T}{F(T)}. \end{aligned}$$

Soit c_1 le coût d'un remplacement préventif et $c_2 > c_1$ le coût d'un remplacement non planifié. Le coût moyen de remplacement par unité de temps est égal à:

$$\begin{aligned} c(T) &= \frac{c_1}{\mu_T} + \frac{c_2 - c_1}{E[Y]} = \frac{c_1 + (c_2 - c_1)F(T)}{\mu_T} \\ &= \frac{c_1 + (c_2 - c_1)F(T)}{\int_0^T (1 - F(z)) dz}. \end{aligned}$$

Si X_n suit une loi uniforme $(0,1)$, on obtient:

$$c(T) = \frac{c_1 + (c_2 - c_1)T}{T(1 - T/2)},$$

dont le minimum est atteint en

$$T = \frac{\sqrt{c_1^2 + 2(c_2 - c_1)c_1} - c_1}{c_2 - c_1} = \frac{\sqrt{1 + 2\alpha} - 1}{\alpha},$$

avec $\alpha = (c_2/c_1) - 1$.

processus de Poisson

Un processus de Poisson peut être vu comme un processus de renouvellement où $N(t)$ suit une loi de Poisson de paramètre λt . On a:

- $P\{\gamma_t > x\} = P\{N(t+x) - N(t) = 0\} = P\{N(x) = 0\} = e^{-\lambda x}$ (amnésie du processus)
- $P\{\delta_t < x\} = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } 0 \leq x < t \text{ (exponentielle)} \\ 1 & \text{si } x \geq t \text{ (tronquée)} \end{cases}$
- $E[\beta_t] = E[\gamma_t] + E[\delta_t] = \frac{1}{\lambda}(2 - e^{-\lambda t})$

On remarque que $\lim_{t \rightarrow \infty} E[\beta_t] = \lim_{t \rightarrow \infty} E[X_{N(t)+1}] = 2/\lambda$ est presque égale au *double* de la durée de vie moyenne.

distribution conjointe de γ_t et de δ_t

$$\begin{aligned} P\{\gamma_t > x, \delta_t > y\} &= P\{N(t-y, t+x) = 0\} \\ &= \begin{cases} e^{-\lambda(x+y)} & \text{si } x > 0 \text{ et } 0 < y < t \\ 0 & \text{si } y \geq t \end{cases} \end{aligned}$$

FILES D'ATTENTE

Un système de file(s) d'attente est caractérisé par un **processus d'entrée** (loi des arrivées des clients), un **processus de service** (temps de service indépendants, nombre de serveurs), une **discipline** (ordre dans lequel les clients sont servis), et différents autres gadgets. Il existe une analogie évidente entre un système de file d'attente et un processus de naissance et de mort où $X(t)$ représente le nombre de clients présents dans le système.

Les mesures traditionnelles du comportement du système sont:

- le nombre de clients dans le système,
- le taux d'utilisation des serveurs,
- le nombre de clients servis par unité de temps,
- le temps d'attente moyen.

Il est pratique de classer les files d'attente les plus simples à l'aide de la notation $A/B/c$ où A représente la loi d'arrivée (G : générale, M : exponentielle, E_k : Erlang de paramètre k , c'est-à-dire une somme de k exponentielles, D : déterministe), B la loi de service et c le nombre de serveurs. On utilise également les notations:

| | |
|---|--|
| L : | nombre moyen de clients dans le système, |
| L_0 : | nombre moyen de clients dans la file, |
| W : | temps moyen passé dans le système, |
| W_0 : | temps moyen passé dans la file, |
| λ : | taux d'arrivée moyen, |
| μ : | taux de service moyen, |
| $\rho \stackrel{\text{def}}{=} \lambda/\mu$: | intensité du trafic, |
| B_k : | kième période d'occupation du serveur, |
| I_k : | kième période d'oisiveté du serveur. |

La loi de Little, valide dans des conditions très générales, stipule que:

$$L = \lambda W \quad \text{et} \quad L_0 = \lambda W_0.$$

file $M/M/1$

Ce cas correspond à un processus de naissance et de mort avec $\lambda_k = \lambda$ ($k \geq 0$) et $\mu_k = \mu$ ($k \geq 1$), où μ est le taux de service ($\mu_0 = 0$). On obtient aisément les probabilités limites du nombre de clients dans le système:

$$\begin{aligned} \theta_k &= (\lambda/\mu)^k = \rho^k \\ \pi_0 &= \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} \theta_k} = 1 - \rho \quad (\text{probabilité de ne pas attendre}) \\ \pi_k &= \pi_0 \theta_k = (1 - \rho) \rho^k \quad (\text{loi géométrique}). \end{aligned}$$

On en déduit les formules:

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{\rho}{1 - \rho} \quad \text{et, par la loi de Little: } W = \frac{1}{\mu - \lambda}.$$

Soit T le temps de passage dans le système, à l'équilibre. S'il y a n clients en avant, T suit une loi d'Erlang (Gamma) de paramètres μ et $n + 1$. On a:

$$\begin{aligned} P\{T \leq t\} &= \sum_{n=0}^{\infty} P\{T \leq t | n \text{ clients en avant}\} \\ &\quad \times (\lambda/\mu)^n (1 - (\lambda/\mu)) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t e^{-\mu\tau} \frac{\mu^{n+1}}{n!} \tau^n \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) d\tau \\ &= 1 - e^{-(\mu-\lambda)t} \quad (\text{loi exponentielle}), \end{aligned}$$

d'où l'on tire: $W = E[T] = 1/(\mu - \lambda)$, ce qui confirme la loi de Little. Soit I_k la k e période d'inactivité du serveur et B_k la k e période d'activité ininterrompue. On a, trivialement: $E[I_k] = 1/\lambda$. On a également (moins trivialement):

$$\begin{aligned} \pi_0 &= 1 - \frac{\lambda}{\mu} = \frac{E[I_k]}{E[I_k] + E[B_k]} \\ \implies E[B_k] &= \frac{1}{\mu - \lambda} = E[T]. \end{aligned}$$

file $M/M/\infty$ (self-service)

$$\begin{aligned} \theta_k &= \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \\ \pi_0 &= \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} \theta_k} = e^{-\frac{\lambda}{\mu}} \\ \pi_k &= \pi_0 \theta_k = e^{-\frac{\lambda}{\mu}} (\lambda/\mu)^k / k! \quad (\text{loi de Poisson}). \end{aligned}$$

Trivialement: $L = \lambda/\mu$ et $W = 1/\mu$. La loi de Little est de nouveau confirmée.

file $M/M/s$

Le taux de départ μ_k est égal à $k\mu$ si $k \leq s$ et à $s\mu$ sinon. On a alors:

$$\theta_k = \begin{cases} \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k & \text{si } k \leq s \\ \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^{k-s} & \text{si } k \geq s. \end{cases}$$

Le nombre moyen de clients dans la file est donné par:

$$\begin{aligned} L_0 &= \sum_{j=s}^{\infty} (j - s) \pi_j = \sum_{k=0}^{\infty} k \pi_{s+k} \\ &= \pi_0 \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^k \\ &= \frac{\pi_0}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \frac{\lambda/s\mu}{(1 - \lambda/s\mu)^2}, \end{aligned}$$

ce qui permet d'évaluer $L = \lambda W = \lambda(W_0 + 1/\mu) = \lambda(L_0/\lambda + 1/\mu) = L_0 + \lambda/\mu$.

file $M/G/1$

Soit G la fonction de répartition du temps de service Y_k . On pose: $E[Y_k] = \nu$, $\text{Var}[Y_k] = \tau^2$.

Soit A le nombre d'arrivées pendant le service du premier client. On a: $E[B_1 | A = 0, Y_1 = y] = y$ et, puisque le système se renouvelle à chaque fin de service:

$$E[B_1 | A = n, Y_1 = y] = y + nE[B_1].$$

En utilisant deux fois la loi de probabilité totale, on obtient:

$$\begin{aligned}
E[B_1|Y_1 = y] &= \sum_{n=0}^{\infty} (y + nE[B_1])e^{-\lambda y} \frac{y^n}{n!} \\
&= y + \lambda y E[B_1] \\
E[B_1] &= (1 + \lambda E[B_1]) \int_0^{\infty} y dG(y) \\
&= (1 + \lambda E[B_1])\nu,
\end{aligned}$$

d'où l'on tire: $E[B_1] = \nu/(1 - \lambda\nu)$ (si $\lambda\nu < 1$, évidemment) et $\pi_0 = E[I_1]/(E[I_1] + E[B_1]) = 1 - \lambda\nu$.

Bien que le processus $M/G/1$ ne soit pas markovien, on peut lui associer une chaîne de Markov discrète où X_n correspond au nombre de clients présents dans le système après le départ du n ème client. Si A_n dénote le nombre d'arrivées pendant le service du client n , on a:

$$X_n = (X_{n-1} - 1)^+ + A_n \quad .$$

Les probabilités de transition sont:

$$\begin{aligned}
P_{ij} &= P\{X_n = j | X_{n-1} = i\} = P\{A_n = j - (i - 1)^+\} \\
&= \begin{cases} \alpha_{j-i+1} & \text{si } i \geq 1 \text{ et } j \geq i - 1 \\ \alpha_j & \text{si } i = 0, \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{où } \alpha_k &= P\{A_n = k\} = \int_0^{\infty} P\{A_n = k | Y_n = y\} dG(y) = \\
&= \int_0^{\infty} e^{-\lambda y} \frac{(\lambda y)^k}{k!} dG(y).
\end{aligned}$$

Asymptotiquement, le nombre de clients dans le système correspond aux probabilités limites de la chaîne de Markov:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P\{X(t) = j\} = \lim_{n \rightarrow \infty} P\{X_n = j\}.$$

Ce résultat est *non trivial* et on ne devrait pas le généraliser sans prendre de précautions. On en déduit que le nombre moyen L de clients dans le système est donné par $\lim_{n \rightarrow \infty} E[X_n]$.

En régime stationnaire, soit X le nombre de clients suivant un départ et X' le nombre de clients suivant le prochain départ. Soit N le nombre d'arrivées pendant le service et $\delta = I(\{X > 0\})$. On a

$$X' = X - \delta + N,$$

d'où: $E[X'] = E[X] - E[\delta] + E[N]$. Puisque $L = E[X'] = E[X]$, on obtient:

$$E[N] = E[\delta] = 1 - \pi_0 = \lambda\nu \quad .$$

On aurait pu obtenir ce dernier résultat à l'aide de la loi de probabilité totale:

$$\begin{aligned}
E[N] &= E_{Y_k}[N | Y_k = t] \\
&= \int_0^{\infty} \lambda t dG(t) = \lambda\nu.
\end{aligned}$$

Maintenant:

$$\begin{aligned}
(X')^2 &= X^2 + \delta + N^2 - 2X + 2N(X - \delta) \\
\Rightarrow E[X^2] &= E[(X')^2] = E[X^2] + E[\delta] + E[N^2] \\
&\quad - 2E[X] + 2E[N]E[X - \delta] \\
&\quad \text{(N et X sont indépendants)} \\
\Rightarrow 0 &= \lambda\nu + E[N^2] - 2L + 2\lambda\nu(L - \lambda\nu) \\
\Rightarrow L &= \frac{\lambda\nu + E[N^2] - 2(\lambda\nu)^2}{2(1 - \lambda\nu)} \quad .
\end{aligned}$$

Or:

$$\begin{aligned}
E[N^2] &= \int_0^{\infty} E[N^2 | Y = y] dG(y) \\
&= \int_0^{\infty} [\lambda y + (\lambda y)^2] dG(y) = \lambda\nu + \lambda^2(\tau^2 + \nu^2) \\
\Rightarrow L &= \frac{2\lambda\nu + (\lambda\tau)^2 - (\lambda\nu)^2}{2(1 - \lambda\nu)} = \rho + \frac{(\lambda\tau)^2 + \rho^2}{2(1 - \rho)}
\end{aligned}$$

$$W = \frac{L}{\lambda} = \nu + \frac{\lambda(\nu^2 + \tau^2)}{2(1 - \rho)} \quad .$$

La formule précédente nous indique qu'on a tout intérêt à ce que la variance du service soit la plus faible possible. Dans le cas d'une file $M/M/1$, on retrouve le résultat $W = 1/(\mu - \lambda)$.

file $M/G/\infty$

Cas particulier d'un processus de Poisson composé considéré dans l'exemple des particules de la page 4.

files d'attente avec reflux

Soit p_n la probabilité qu'un client entre dans le système alors que n clients s'y trouvent déjà. Avec probabilité $1 - p_n$, le client ne se joint pas à la file. Par exemple: $p_n = I(\{n \leq C\})$, où C correspond à la capacité de l'antichambre. Le **taux d'accès** est maintenant: $\lambda_n = \lambda p_n$ et le taux d'accès asymptotique est $\lambda_{in} = \lambda \pi \rho$. Le **taux de rejet asymptotique** est $\lambda_{out} = 1 - \lambda_{in}$.

Dans le cas où un client refuse d'attendre dans un système $M/M/s$, on a:

$$\lambda_k = \lambda I(\{k < s\}) \quad \mu_k = k\mu \quad \theta_k = \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k$$

$$\pi_k = \frac{(\lambda/\mu)^k / k!}{\sum_{j=0}^s (\lambda/\mu)^j / j!} \quad \forall k \geq 0 \quad .$$

taux de service variable (cas amnésique)

Pour répondre à la demande, on peut rajouter un serveur lorsque le nombre de clients dans la file excède l . On a alors:

$$\lambda_k = \lambda \quad \forall k \geq 0 \quad \text{mais} \quad \mu_k = \begin{cases} \mu & \text{si } k \leq l \\ 2\mu & \text{si } k > l. \end{cases}$$

On généralise aisément au cas de taux de service μ_k quelconques:

$$\pi_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{\prod_{i=1}^k \mu_i}} \quad \pi_k = \frac{\lambda^k}{\prod_{i=1}^k \mu_i} \pi_0 .$$

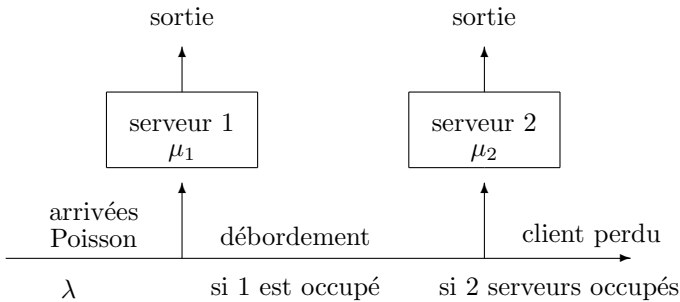
système avec feedback (cas amnésique)

Un client retourne à la file avec probabilité p , indépendamment de l'état du système. On a alors $\mu_n = (1-p)\mu$ et on est ramené au cas $M/M/1$.

file à deux serveurs avec reflux

Soit $X_i(t) = 1$ si le serveur i est occupé (et 0 sinon). Les taux de transition inter-états sont:

$$\begin{array}{ll} (0,0) \rightarrow (1,0) & \lambda \\ (1,0) \rightarrow (0,0) & \mu_1 \\ (1,0) \rightarrow (1,1) & \lambda \\ (1,1) \rightarrow (1,0) & \mu_2 \end{array} \quad \begin{array}{ll} (1,1) \rightarrow (0,1) & \mu_1 \\ (0,1) \rightarrow (1,1) & \lambda \\ (0,1) \rightarrow (0,0) & \mu_2 \end{array}$$



On peut alors écrire les équations d'équilibre:

$$\begin{aligned} -\lambda\pi_{(0,0)} + \mu_2\pi_{(0,1)} + \mu_1\pi_{(1,0)} &= 0 \\ -(\lambda + \mu_2)\pi_{(0,1)} + \mu_1\pi_{(1,1)} &= 0 \\ \lambda\pi_{(0,0)} - (\lambda + \mu_1)\pi_{(1,0)} + \mu_2\pi_{(1,1)} &= 0 \\ \lambda\pi_{(0,1)} + \lambda\pi_{(1,0)} - (\mu_1 + \mu_2)\pi_{(1,1)} &= 0 . \end{aligned}$$

En ajoutant l'équation $\pi_{(0,0)} + \pi_{(0,1)} + \pi_{(1,0)} + \pi_{(1,1)} = 1$, on obtient, après de fastidieux calculs:

$$\begin{aligned} \pi_{(0,0)} &= [\mu_1\mu_2(2\lambda + \mu_1 + \mu_2)]/D \\ \pi_{(0,1)} &= \lambda^2\mu_1/D \\ \pi_{(1,0)} &= [\lambda\mu_2(\lambda + \mu_1 + \mu_2)]/D \\ \pi_{(1,1)} &= \lambda^2(\lambda + \mu_2)/D, \end{aligned}$$

avec $D = \mu_1\mu_2(2\lambda + \mu_1 + \mu_2) + \lambda^2\mu_1 + \lambda\mu_2(\lambda + \mu_1 + \mu_2) + \lambda^2(\lambda + \mu_2)$.

réseaux de files d'attente (cas amnésique, ouvert, acyclique)

Dans un réseau de files d'attente, les clients accèdent à la racine (source) du réseau. Une fois son service complété à un nœud du réseau, le client se dirige vers un autre point de service en empruntant un arc, le choix de l'arc de sortie étant déterminé par une loi de probabilité.

Dans un réseau ouvert et acyclique, les arrivées sont générées à l'extérieur du réseau. Les clients ne peuvent visiter un sommet (serveur) plus d'une fois et quittent le réseau pour ne plus y revenir. L'analyse de ces systèmes est basée sur le théorème fondamental suivant, qui stipule que les processus stationnaires d'entrée et de sortie sont *indépendants* et *poissoniens*.

Théorème: Soit $X(t)$ un processus de naissance et de mort avec taux de naissance constant λ et taux de mortalité μ_n arbitraire. Soit $D(t)$ le nombre de décès jusqu'à l'instant t . S'il existe une distribution stationnaire π et que l'on a: $P\{X(0) = k\} = \pi_k$, alors:

$$\begin{aligned} P\{X(t) = k, D(t) = j\} &= P\{X(t) = k\} P\{D(t) = j\} \\ &= \pi_k e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!} \quad \forall k, j \geq 0. \end{aligned}$$

Si on applique le théorème à deux files d'attente en tandem (série), où le taux de service du deuxième serveur est μ_2 , on obtient:

$$P\{X_2(t) = n\} = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu_2}\right) \left(\frac{\lambda}{\mu_2}\right)^n .$$

Dans le cas d'un réseau général, soit λ_{0k} le taux d'arrivée au sommet k directement de l'extérieur, et P_{jk} la probabilité de visiter le sommet k en provenant du sommet j . Les équations de conservation du flot prennent la forme:

$$\lambda_k = \lambda_{0k} + \sum_j \lambda_j P_{jk} .$$

Puisque le graphe est acyclique, il est possible de résoudre récursivement ce système d'équations en se basant sur l'un des ordres topologiques du graphe (revoir les diagrammes de Hasse introduits en IFT 1063).

BIBLIOGRAPHIE

Toute la matière couverte dans ces notes se trouve dans les livres suivants.

- Howard M. TAYLOR et Samuel KARLIN
An introduction to stochastic modeling (3rd edition)
Academic Press (1998)
- Sheldon M. ROSS
An introduction to probability models (7th edition)
Academic Press (2000)
- Eric V. DENARDO
Dynamic Programming
Prentice-Hall (1982)
(processus de décision markoviens actualisés)
- Frederick S. HILLIER et Gerald L. LIEBERMAN
Introduction to Operations Research (6th edition)
McGraw-Hill (1995)

Dernières modifications en date du 22 novembre 2006.