

À remettre le lundi 10 février 2014

1 _____ (15 points)

Soit X un ensemble convexe. On définit :

$$\begin{aligned} \text{dist}(x, X) &= \min_{y \in X} \|x - y\| \\ B(x; t) &= \{y : \|y - x\| \leq t\} \\ X_t &= \{x : \text{dist}(x, X) \leq t\} \\ Y_t &= \{x : B(x; t) \subseteq X\}. \end{aligned}$$

Démontrer que les ensembles X_t et Y_t sont convexes. Ces résultats sont-ils valides si X n'est pas convexe ?

2 _____ (15 points)

Soit le programme linéaire paramétrique

$$\begin{aligned} f(t) = \max \quad & (c + t)x \\ \text{sujet à} \quad & Ax \leq b. \end{aligned}$$

Démontrer que f est convexe et caractériser son sous-différentiel.

Démontrer un résultat semblable pour le problème :

$$\begin{aligned} f(t) = \max \quad & cx \\ \text{sujet à} \quad & Ax \leq b + t. \end{aligned}$$

3 _____ (15 points)

Exercice 4.18 dans le livre de Bazaara, Sherali et Shetty (page 176, deuxième édition).

4 _____ (15 points)

Exercice 5.1 dans le livre de Bazaara, Sherali et Shetty (page 195, deuxième édition).

5 _____ **(15 points)**

Soit une matrice A semidéfinie positive, mais pas nécessairement symétrique. Démontrer qu'il existe toujours un vecteur $x \geq 0$ non nul tel que $Ax \geq 0$, en étudiant le programme linéaire

$$\begin{array}{ll} \max & \sum_j x_j \\ \text{s.t.} & Ax \geq 0 \\ & x \geq 0 \end{array}$$

et son dual.

Si A est symétrique, montrer qu'on peut obtenir le même résultat à partir des conditions d'optimalité du programme quadratique

$$\begin{array}{ll} \min & x^t Ax \\ \text{s.t.} & \sum_j x_j = 1 \\ & x \geq 0 \end{array}$$

6 _____ **(15 points)**

Soient E_1, E_2, \dots, E_n n ensembles convexes et fermés tels que $X^* = \bigcap_{i=1}^n E_i \neq \emptyset$. On cherche un point de X^* en projetant successivement le point courant sur l'ensemble le plus éloigné.

Faire le lien entre cet algorithme et l'algorithme de sous-gradient :

$$x^{k+1} = x^k - \frac{f(x) - f^*}{\|\xi\|^2} \xi^k,$$

où $\xi^k \in \partial f(x^k)$ et en déduire la convergence de la suite des itérés vers un point de X^* .

7 _____ **(10 points)**

Soit g une fonction convexe et non décroissante d'une seule variable et f une fonction convexe définie sur un sous-ensemble convexe C de R^n . Montrer que la fonction $g(f(x))$ est convexe sur C . En déduire des conditions sur le scalaire a et la matrice Q pour que la fonction $\exp(ax^t Qx)$ soit convexe.