À remettre le mercredi 4 octobre avant la fin du cours

1 _____ (20 points)

À l'aide de la méthode du simplexe, puis graphiquement (sur le problème dual), trouver *toutes* les solutions optimales du programme linéaire:

$$\begin{aligned} \max_{x \geq 0} \quad & 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \leq 5 \\ & x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leq 3 \quad . \end{aligned}$$

2 _____ (20 points)

Vérifier que le vecteur $(0, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 0)$ est une solution optimale du programme linéaire

$$\begin{aligned} \max_{x \geq 0} \quad & 7x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 \\ & x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 2x_5 \leq 4 \\ & 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 \leq 3 \\ & 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 2x_4 + 5x_5 \leq 5 \\ & 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 - 2x_5 \leq 1 \quad . \end{aligned}$$

3 _____ (10 points)

Écrire le dual du programme linéaire

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 - x_2 \\ & 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 \leq 0 \\ & 3x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 \geq 3 \\ & -x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ & x_2, x_3 \geq 0 \quad . \end{aligned}$$

4 _____ (20 points)

En construisant un programme linéaire adéquat et son dual, démontrer qu'exactly l'un des deux systèmes suivants doit être satisfait:

$$\begin{array}{ll} Ax \geq 0 & yA < 0 \\ x \geq 0 & y \geq 0 \\ x \neq 0 & \end{array}$$

En déduire que, si A est une matrice semidéfinie positive ($xAx \geq 0$ pour tout $x \in R^n$), il existe toujours une solution non nulle au système $Ax \geq 0, x \geq 0$.

5 _____ (10 points)

Construire un exemple de problème de flot à coût minimal possédant la propriété suivante: si l'offre à une origine et la demande à une destination sont simultanément diminuées d'une unité, alors le coût total de la solution optimale augmente! Dans votre exemple, tous les coûts doivent être positifs ou nuls.

6 _____ (20 points)

Soit le problème de flot maximal défini par la matrice d'adjacence suivante (les nombres entre parenthèses correspondent aux capacités sur les arcs):

$$\begin{pmatrix} 0 & 1(3) & 1(4) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1(3) & 1(2) & 0 \\ 0 & 1(1) & 0 & 0 & 1(3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1(4) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1(3) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Résoudre à l'aide (i) de la méthode du simplexe (ii) de l'algorithme de Ford et Fulkerson en favorisant les chaînes d'augmentation maximale.