

IFT 6575 DEVOIR 2

(à remettre le vendredi 27 octobre)

1 _____ (20 points)

Soit le programme mathématique

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1^2 + (x_2 + 1)^2 \\ & x_1 + x_2 \leq 1 \\ & -x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_2 \geq 0, \quad x_1 \text{ libre,} \end{aligned}$$

dont la solution se trouve à l'origine. Démontrer que l'ordre de convergence de l'algorithme de Frank-Wolfe est sous-linéaire si le point initial ne se trouve pas sur l'axe des abscisses, et linéaire sinon.

2 _____ (20 points)

Soit le programme mathématique

$$\begin{aligned} \min_x \quad & \frac{1}{2} x^t A x + b^t x \\ & \sum_{i=1}^3 x_i = 1 \\ & x \geq 0, \end{aligned}$$

où la matrice A est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

et

$$b = (2, 1, -2)^t.$$

1. écrire les conditions d'optimalité de Kuhn et Tucker et les résoudre;
2. résoudre le programme à l'aide de l'algorithme de Frank-Wolfe;
3. résoudre le programme à l'aide de l'algorithme du gradient projeté (Goldstein-Levitin-Polyak);

3 _____ (20 points)

Soit le programme mathématique

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1^2 + x_2^2 \\ & x_1 + x_2 \geq 5 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

1. Écrire les conditions de Kuhn-Tucker et déterminer la solution optimale.
2. Déterminer le dual lagrangien correspondant à la dualisation de la première contrainte.
3. Trouver la solution du problème lagrangien et en déduire la solution du problème primal.

Déduire de la solution du programme mathématique

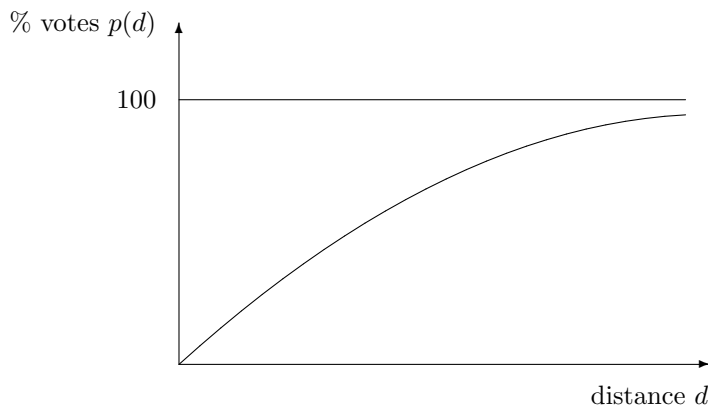
$$\begin{aligned} \max \quad & \prod_{j=1}^n x_j \\ & \sum_{j=1}^n x_j = 1 \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

l'inégalité, valide pour tout ensemble de nombres non négatifs:

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j \geq \left(\prod_{j=1}^n x_j \right)^{1/n}.$$

La décision a été prise de construire une centrale nucléaire dans la circonscription X représentée par un député du parti au pouvoir. Il reste à déterminer l'emplacement de la centrale.

La population du comté est répartie dans trois villes de coordonnées respectives (a_1, a_2) , (b_1, b_2) et (c_1, c_2) . Personne ne souhaite vivre à proximité de la centrale (syndrome "pas dans ma cour"). Plus précisément, d'après des sondages, le pourcentage de votes que le député obtiendra dans une ville est proportionnel à la distance séparant la centrale de la ville (voir figure ci-dessous). La centrale doit être construite à l'intérieur du triangle formé par les trois villes.



Soit P_i la population de la ville i . Suggérer une forme explicite de la fonction p de la figure et formuler un programme non linéaire qui aide le député à gagner ses élections.

1. écrire les conditions d'optimalité de Kuhn et Tucker et les résoudre;
2. résoudre le programme à l'aide de l'algorithme du gradient projeté (Goldstein-Levitin-Polyak);

Soit f une fonction convexe et g une fonction concave positive, toutes deux définies sur un ensemble convexe C . Démontrer que la fonction f^2/g est convexe sur C . En déduire des conditions sur la matrice Q , le vecteur c et le scalaire d pour que la fonction $x^t Q x / (c^t x + d)$ soit convexe. Ce résultat généralise celui de l'exercice 3.14 du livre de Bazaraa, Sherali et Shetty.