IFT 6575 DEVOIR 3

(à remettre le mercredi 15 novembre)

1 _____ (20 points)

Le problème de l'arbre sous-tendant minimal consiste à déterminer, dans un graphe connexe non orienté de n sommets, un arbre comportant $n - 1$ arcs et de coût minimal (les coûts sont associés aux arcs du graphe). Écrire un programme linéaire en nombres entiers dont la solution soit l'arbre sous-tendant minimal.

2 _____ (20 points)

Soit le programme linéaire en variables entières

$$\begin{aligned} \max \quad & 3x_1 + 3x_2 + 13x_3 \\ & -3x_1 + 6x_2 + 7x_3 \leq 8 \\ & 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 \leq 8 \end{aligned}$$

1. Résoudre par la méthode de Branch-and-Bound.
2. Trouver 2 coupes valides à l'itération 0.

3 _____ (20 points)

Sachant que les variables x_1 , x_2 et x_3 ne peuvent prendre de valeurs situées à l'extérieur de l'intervalle $[0, 3]$, transformer la contrainte non linéaire

$$x_1 x_2 x_3 = 0$$

en contrainte linéaire en utilisant des variables binaires.

4 _____ (40 points)

Étant donné un graphe $G = (V, A)$, où V représente l'ensemble des sommets et A l'ensemble des arcs, considérer le problème du voyageur de commerce, qu'on peut modéliser ainsi, en posant $n = |V|$ et en numérotant les sommets de 1 à n (c_{ij} est la distance parcourue pour aller du sommet i au sommet j):

$$\min_x \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, \quad j = 1, \dots, n, \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i = 1, \dots, n, \tag{3}$$

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \in S} x_{ij} \leq |S| - 1, \quad S \subset V, S \neq \emptyset, \tag{4}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n. \tag{5}$$

1. Donner une interprétation des variables et des contraintes de ce modèle.
2. Montrer qu'on peut remplacer les contraintes (4) par les contraintes suivantes, où u est un vecteur de variables libres de dimension n :

$$u_i - u_j + n x_{ij} \leq n - 1, \quad (i, j) \in A, i \neq 1, j \neq 1. \tag{6}$$

3. Montrer que, pour tout $x \geq 0$ satisfaisant les contraintes (2), (3) et (4) (c'est-à-dire pour tout point du domaine réalisable de la relaxation linéaire du modèle), il existe un vecteur u de dimension n tel que x satisfait aussi les contraintes (6). **Indice:** Pensez au dual d'un problème de plus courts chemins.
4. Dédurre du résultat précédent que le modèle utilisant les contraintes (6) au lieu des contraintes (4) est moins intéressant du point de vue de la qualité des bornes inférieures obtenues suite à la relaxation des contraintes d'intégralité.