IFT 6575 DEVOIR 4

(à remettre le vendredi 8 décembre)

1 _____ (30 points)

Résoudre le programme stochastique décrit en

<http://www.iro.umontreal.ca/~marcotte/Ift3651/PDM.pdf>

à l'aide de l'algorithme d'amélioration des politiques et l'algorithme d'approximations successives.

2 _____ (15 points)

Un ordinateur comprend 2 ventilateurs. Lorsque le premier tombe en panne, le second prend le relais. Lorsque les deux ventilateurs sont en panne, ils sont remplacés. La probabilité qu'un ventilateur tombe en panne à une journée donnée est de $1/5$ (pas vraiment fiable...) et le remplacement ne se fait que le jour suivant.

- Décrire la matrice de transition associée à cette chaîne de Markov.
- Calculer le temps moyen entre deux remplacements.
- Calculer le vecteur de probabilités stationnaires.
- Les probabilités limites existent-elles?

3 _____ (10 points)

Soit un processus de ramification où le nombre d'enfants est donné par une loi de Poisson de paramètre λ . Trouver la ou les valeurs de λ compatible avec une probabilité d'extinction p de la population.

4 _____ (15 points)

Soit $X(t)$ un processus de Poisson. Pour $t > s$, donner une expression pour le coefficient de corrélation entre $X(s)$ et $X(t)$.

Note: Utiliser les probabilités conjointes $P\{X(s) = n, X(t) = n + k\}$. Je rappelle que $\text{Cov}[X, Y] = E[XY] - E[X]E[Y]$ et que $\text{Corr}[X, Y] = \text{Cov}[X, Y]/\sigma_X\sigma_Y$.

5 _____ (20 points)

Un autobus quitte la ville A avec n passagers à bord, et dessert un certain nombre d'arrêts. À chaque arrêt, un passager descend et marche jusqu'à son domicile. Sachant que le temps de marche suit une loi exponentielle de paramètre μ et que la durée du trajet entre deux arrêts est exponentielle de paramètre λ ,

- Déterminer la distribution de l'instant auquel le dernier passager quitte l'autobus.
- Soit t l'instant auquel le dernier passager quitte l'autobus. Quelle est la probabilité que tous les autres passagers aient rejoint leur domicile à ce moment?

5 _____ (10 points)

On considère une file d'attente $M/E_2/1$, c'est-à-dire une file où le temps de service suit une loi d'Erlang de paramètres μ et k ($k = 2$).

Représenter le système à l'aide d'un processus de Markov continu, c'est-à-dire où les durées entre deux transitions sont exponentielles. Bien décrire les états du système ainsi que les taux de transition.

Note: Une variable aléatoire X suit une loi d'Erlang de paramètres μ et k si et seulement si X est la somme de k variables aléatoires exponentielles indépendantes de paramètre μ .