

**UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL**  
**DÉPARTEMENT D'INFORMATIQUE ET DE**  
**RECHERCHE OPÉRATIONNELLE**  
**EXAMEN FINAL**

**IFT 6575 MODÈLES DE RECHERCHE**  
**OPÉRATIONNELLE**

**Professeur :** Patrice MARCOTTE

**Date:** Vendredi 15 décembre 2006  
**Heure:** 14h00 à 17h00  
**Salles:** Salle 3195, pavillon André Aisenstadt

NOTES DE COURS AUTORISÉES

LA CALCULATRICE EST NON SEULEMENT INUTILE, MAIS INTERDITE

**RÈGLEMENT SUR LE PLAGIAT**

(extrait du règlement disciplinaire sur le plagiat ou la fraude de l'Université)

Constitue un plagiat:

- Faire exécuter son travail par un autre.
- Utiliser, sans le mentionner, le travail d'autrui.
- Échanger des informations lors d'un examen.
- Falsifier des documents.

Le plagiat est passible de sanctions allant jusqu'à l'exclusion du programme.

Soit le programme linéaire

$$(P_x) \quad \begin{array}{ll} \max_{x \in X} & cx \\ \text{sujet à} & Bx = b \\ & x \geq 0, \end{array}$$

où  $X$  est un polytope (polyèdre convexe et borné). Tout point de  $X$  pouvant s'exprimer comme une combinaison convexe des points extrémaux  $\{x^k\}$  de  $X$ , on a:

$$X = \left\{ \sum_k \lambda_k x^k : \sum_k \lambda_k = 1, \lambda_k \geq 0 \right\}.$$

Dans l'espace des coefficients  $\lambda$ , le programme linéaire initial se formule comme

$$(P_\lambda) \quad \begin{array}{ll} \max_{\lambda} & \sum_k \lambda_k (cx^k) \\ \text{sujet à} & \sum_k \lambda_k (Bx^k) = b \\ & \sum_k \lambda_k = 1 \\ & \lambda \geq 0. \end{array}$$

- Écrire le dual du programme linéaire  $(P_\lambda)$ .
- Montrer que le coût réduit associé à la variable  $\lambda_k$  est  $\bar{c}_k = cx^k - yBx^k - y_0$ , où  $y$  est le vecteur dual associé aux contraintes de  $(P_\lambda)$ .
- En déduire qu'on peut trouver une variable  $\lambda_k$  ( $k \neq 0$ ) de coût réduit positif en résolvant le programme linéaire

$$\max_{x \in X} (c - yB)x,$$

et qu'il n'est pas nécessaire de connaître a priori tous les points extrémaux de  $X$  pour appliquer l'algorithme du simplexe à  $(P_\lambda)$ .

- Donner des raisons qui expliqueraient pourquoi il peut être intéressant de passer par  $(P_\lambda)$  pour résoudre  $(P_x)$ .
- Est-il indispensable que  $X$  soit un polyèdre pour implanter la stratégie suggérée par les étapes précédentes?

## 2 \_\_\_\_\_ (25 points)

Dans le tableau ci-dessous, vous retrouvez les arcs d'un réseau ainsi que les coûts unitaires de transport associés.

|                    |            |               |               |               |            |
|--------------------|------------|---------------|---------------|---------------|------------|
| $(i, j) :$         | (1,2)      | (1,3)         | (2,3)         | (2,4)         | (3,4)      |
| $c_{ij}(x_{ij}) :$ | $10x_{12}$ | $50 + x_{13}$ | $10 + x_{23}$ | $50 + x_{24}$ | $10x_{34}$ |

- Tracer le réseau.
- Soit 6 le nombre d'utilisateurs allant du sommet 1 au sommet 4. On souhaite minimiser le coût total de transport  $\sum_{i,j} c_{ij}(x_{ij})x_{ij}$ . Écrire le programme quadratique correspondant et effectuer une itération de l'algorithme de Frank et Wolfe pour le résoudre.
- Quelle est la structure particulière du sous-problème linéaire? Celle-ci permettrait-elle de résoudre des problèmes de grande taille?
- Considérer maintenant, toujours avec la même structure de réseau, le programme mathématique

$$\min_x \sum_{i,j} \int_0^{x_{ij}} c_{ij}(t) dt.$$

Écrire les conditions de Kuhn-Tucker et en déduire, qu'à la solution optimale, les coûts des trois chemins existants sont égaux.

## 3 \_\_\_\_\_ (15 points)

Dans une journée donnée, un automobiliste se stationne deux fois illégalement, pour une période d'une heure chaque fois. Sachant que le contrôle du stationnement correspond à un processus de Poisson et que le temps moyen entre deux contrôles est de  $\mu$ :

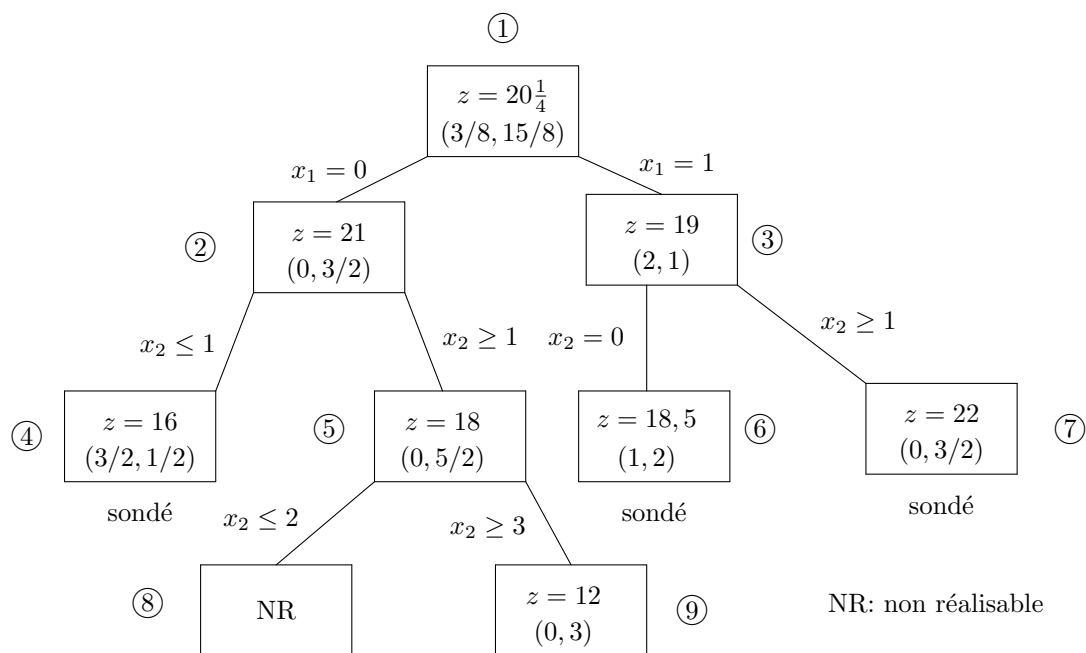
- Déterminer la probabilité que l'automobiliste obtienne une contravention.
- Votre réponse aurait-elle été différente si l'automobiliste se stationnait pour deux heures consécutives plutôt que deux heures séparées?
- Répondre aux deux questions précédentes en supposant que la durée de chaque période de stationnement est une variable aléatoire uniforme de moyenne 1.

Soit le programme linéaire en variables entières

$$\begin{aligned} \max \quad & c_1 x_1 + c_2 x_2 \\ Ax \leq & b \\ x_1, x_2 \text{ entiers non négatifs.} \end{aligned}$$

où les coefficients  $c_1$  et  $c_2$  sont entiers.

En appliquant la technique de Branch-and-Bound (parcours de l'arbre **en largeur**) un étudiant obtient l'arbre d'énumération partiel suivant, où sont indiquées la valeur  $z$  et la solution optimale de la relaxation linéaire. Identifier le plus grand nombre d'erreurs grossières ou impossibilités lors du parcours de cet arbre.



**5** \_\_\_\_\_ **(10 points)**

Une particule se déplace sur les sommets d'un pentagone, avec probabilité  $p$  vers la droite (sens horaire), et probabilité  $1 - p$  vers la gauche. Si les sommets sont numérotés de 1 à 5, donner la matrice de transition associée à cette chaîne de Markov et calculer le vecteur de probabilités stationnaires. Existe-t-il des probabilités limites?

**6** \_\_\_\_\_ **(10 points)**

Dans une file d'attente  $M/M/1$ , les clients ne se joignent pas à la file si plus de 4 clients sont en attente.

- Modéliser le processus comme une chaîne de Markov continue, en spécifiant le générateur infinitésimal du processus.
- Indiquer comment estimer la longueur moyenne de la file, le temps moyen passé dans le système, et le pourcentage de clients perdus à long terme.

**7** \_\_\_\_\_ **(15 points)**

Une entreprise doit déterminer 5 lieux de forage parmi un ensemble de 10 candidats. À chaque lieu  $i$  est associé un coût  $c_i$ .

Déterminer un programme linéaire en nombres entiers permettant de minimiser le coût total, sachant que

- si les sites 2 et 3 sont choisis, alors le site 7 ne peut l'être;
- si soit le site 4, soit le site 5 est choisi, alors le site 6 ne peut l'être;
- au moins un des sites parmi l'ensemble  $\{3, 6, 7, 9\}$  doit être choisi.