CORRIGÉ DES POINTS IMPORTANTS DE L'EXAMEN FINAL

1 _____ (20 points)

L'ensemble d'offres et de demandes n'est pas unique. Par exemple, on peut augmenter l'offre et la demande d'un même montant aux sommets respectifs 1 et 2.

2 _____ (25 points)

En écrivant les conditions d'optimalité, on obtient le programme mathématique

$$\begin{array}{ll} \max_{t,x,y,\lambda} & tx \\ \text{sujet à} & Ax + By = b \\ & x, y \geq 0 \\ & \lambda A \leq c + t \quad (c + t - \lambda A)x = 0 \\ & \lambda B \leq d \quad (d - \lambda B)y = 0. \end{array}$$

Si $x_j > 0$ on doit avoir, par complémentarité, $(\lambda A - c)_j$. Si $x_j = 0$, on se fiche royalement de la valeur de $(\lambda A - c)_j$, car elle n'influence pas l'objectif. On peut donc poser sans perte de généralité $t = \lambda A - c$. En substituant cette valeur dans l'objectif on obtient, en utilisant les contraintes primales et duales:

$$tx = (\lambda A - c)x = \lambda Ax - cx = \lambda(b - By) - cx = \lambda b - dy - cx.$$

Si on laisse tomber la contrainte $(\lambda B - d)y = 0$, le dual de la partie "λ" du problème devient:

$$\begin{array}{ll} \min_{y'} & dy' \\ \text{sujet à} & By' = b \\ & y' \geq 0. \end{array}$$

La borne supérieure correspond donc à la différence entre un problème où les consommateurs satisfont leurs besoins en n'utilisant aucun produit taxé, et un problème où les taxes de tous les produits sont nulles.

3 _____ (25 points)

Le programme quadratique (Q) détermine la direction du gradient projeté sur les contraintes actives. Ses conditions d'optimalité sont (j'ai prémultiplié par 1/2 pour ne pas traîner la constante 2):

$$\begin{array}{ll} y - (\bar{x} + \bar{y}) & = A_0^t \lambda \\ A_0 y & = b. \end{array}$$

À l'optimum du problème initial, la solution $\bar{y}$ est égale à $\bar{x}$ (sinon on obtiendrait une direction de descente admissible), et $\bar{x}$ satisfait alors trivialement les conditions précédentes. L'inverse n'est pas toujours vrai. Par exemple, si $\bar{x}$ est un point extrémal, on aura toujours $\bar{y} = \bar{x}$, alors que tout point extrémal n'est évidemment pas toujours optimal.

Pour déterminer $\bar{y}$, on multiplie $y - (\bar{x} + \bar{y}) = A_0^t \lambda$ par A_0 (de la gauche) et on substitue $A_0 y$ par b pour obtenir un système linéaire ne faisant intervenir que le vecteur λ , d'où l'on tire λ , puis $\bar{y}$.

Soit α l'écart minimal, que l'on souhaite le plus grand possible. on doit alors avoir

$$ax^i + b \geq \alpha \quad \forall i \in I$$

(les points du premier ensemble se trouvent "au-dessus" de l'hyperplan) et

$$ay^j + b \leq -\alpha \quad \forall j \in J$$

(les points du deuxième ensemble se trouvent "au-dessous" de l'hyperplan). Pour que ces expressions représentent des distances, on pose $\|a\| = 1$, ce qui donne le problème quadratique *non convexe*

$$\begin{aligned} \max_{a,b,\alpha} \quad & \alpha \\ \text{sujet à} \quad & ax^i + b \geq \alpha \quad \forall i \in I \\ & ay^j + b \leq -\alpha \quad \forall j \in J \\ & \|a\|^2 = 1. \end{aligned}$$

Pour obtenir un programme convexe, il suffit de remplacer $\|a\|^2 = 1$ par $\|a\|^2 \leq 1$ et de remarquer que, puisque l'on maximise α , la contrainte sera satisfaite à égalité à l'optimum.

Alternativement, on aurait pu arbitrairement fixer l'écart minimal à 1 et minimiser $\|a\|^2$ (pourquoi?), ce qui mènerait à:

$$\begin{aligned} \min_{a,b} \quad & \|a\|^2 \\ \text{sujet à} \quad & ax^i + b \geq 1 \quad \forall i \in I \\ & ay^j + b \leq -1 \quad \forall j \in J. \end{aligned}$$

Pour que cette technique fonctionne, il faut évidemment que les ensembles de points soient *strictement* séparables, ce que l'on peut vérifier a priori en cherchant un point admissible du système linéaire constitué par les contraintes.

Dans le cas non séparable, soit u_i une variable binaire qui vaut 1 si le point $i \in I$ est mal classé, et 0 sinon. On utilise des variables binaires v_j pour les points de J . On peut minimiser le nombre de points mal classés en résolvant le programme mathématique

$$\begin{aligned} \min_{a,b,u,v} \quad & \sum_{i \in I} u_i + \sum_{j \in J} v_j \\ \text{sujet à} \quad & ax^i + b \geq -Mu_i \quad \forall i \in I \\ & ay^j + b \leq Mv_j \quad \forall j \in J \\ & u_i, v_j \in \{0, 1\} \quad \forall i \in I, \forall j \in J. \end{aligned}$$

Pour écarter la solution triviale où toutes les variables sont nulles, on peut poser $b = 1$.

Question intéressante: comment trouver une valeur de la constante M qui assure que l'on n'élimine pas de solution optimale?

Soit $i = (m, n, x)$ l'état de la partie, avec $0 \leq m, n \leq 10$ et x représente le joueur possédant le service ($x = A$ ou $x = B$). Les éléments de la matrice de transition P sont, pour m et n inférieurs à 15:

$$\begin{aligned} P_{(m,n,A)(m+1,n,A)} &= p \\ P_{(m,n,A)(m,n,B)} &= 1 - p \\ P_{(m,n,B)(m,n+1,B)} &= p \\ P_{(m,n,B)(m,n,A)} &= 1 - p. \end{aligned}$$

Les états absorbants sont de la forme $(10, n, A)$ ($0 \leq n < 10$) et $(m, 10, B)$ ($0 \leq m < 10$). Pour obtenir la probabilité de gain du joueur A, on définit le vecteur de gain $g_i = 1$ si i est un état gagnant pour A, c'est-à-dire de la forme $(10, n, A)$, et $g_i = 0$ sinon, et on calcule le gain espéré en résolvant le système $w = g + Qw$.

Si 2 points doivent séparer le gagnant du perdant, on peut évidemment considérer une chaîne de Markov avec un nombre infini d'états, mais il est beaucoup plus simple de garder les valeurs de m et n toujours inférieures ou égales à 12. Par exemple, la transition de $(11,10,A)$ se fera vers l'état gagnant $(12,10,A)$ (avec probabilité p) soit vers $(11,10,B)$ (avec probabilité $1 - p$), alors que la transition de $(10,11,A)$ se fera vers $(10,10,A)$, et non $(11,11,A)$ avec probabilité p , les deux situations étant équivalentes du point de vue du jeu.

On peut directement calculer les probabilités de passer d'un état à un état où le score a progressé, évitant ainsi les boucles. La probabilité que le joueur au service compte le *prochain* point est donnée par:

$$p + (1 - p)^2 p + (1 - p)^4 p + \dots = 1/(2 - p).$$

Soit $\pi_{m,n,x}$ la probabilité que le joueur remporte la partie alors que le score est (m, n) . En utilisant le principe de programmation dynamique, on obtient:

$$\begin{aligned} \pi_{m,n,A} &= \frac{1}{2 - p} \pi_{m+1,n,A} + \frac{1 - p}{2 - p} \pi_{m,n+1,B} \\ \pi_{m,n,B} &= \frac{1}{2 - p} \pi_{m,n+1,B} + \frac{1 - p}{2 - p} \pi_{m+1,n,A}. \end{aligned}$$

On peut alors calculer récursivement $\pi_{m,n,A}$ et $\pi_{m,n,B}$ pour toutes les valeurs de m et n , en partant des valeurs les plus élevées, et en notant les conditions limites: $\pi_{10,n,A} = 1$ et $\pi_{m,10,B} = 0$. La valeur que l'on cherche est bien sûr $\pi_{0,0,A}$.