

À remettre le mercredi 31 octobre avant la fin du cours

1 _____ (15 points)

À l'aide des conditions d'optimalité de Kuhn et Tucker, montrer comment minimiser une fonction linéaire ou quadratique sur la frontière définie par une ellipse.

2 _____ (15 points)

Soit f une fonction convexe et g une fonction concave positive, toutes deux définies sur un ensemble convexe C . Démontrer que la fonction f^2/g est convexe sur C . En déduire des conditions sur la matrice Q , le vecteur c et le scalaire d pour que la fonction $(x^t Q x)^2 / (c^t x + d)$ soit convexe. Ce résultat généralise celui de l'exercice 3.14 du livre de Bazaraa, Sherali et Shetty.

3 _____ (15 points)

[BSS, Chapitre 6, exercice 6.2] Soit le programme mathématique

$$\begin{array}{ll} \max_{x \geq 0} & 2x_1 + 3x_2 - x_3 \\ \text{sujet à} & \begin{array}{llll} x_1 + x_2 - x_3 & \leq & 1 \\ x_1 + x_2 & \leq & 4 \\ & x_3 & \leq & 2 \end{array} \end{array}$$

1. Soit $X = \{x \geq 0 : x_1 + x_2 - x_3 \leq 1\}$. Donner une expression explicite de la fonction duale.
2. Même question avec $X = \{x \geq 0 : x_1 + x_2 \leq 4\}$.
3. Discuter des avantages et inconvénients respectifs dans la définition de l'ensemble X , pour cet exemple en particulier et des programmes plus généraux.

3 _____ **(15 points)**

Déterminer toutes les solutions du système de Kuhn et Tucker associé au programme mathématique

$$\begin{aligned} \max \quad & (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2 \\ & 3x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ & -x_1 + x_2 \leq 3 \\ & x_1 \leq 2. \end{aligned}$$

Déterminer la nature des solutions.

4 _____ **(40 points)**

Soit le programme mathématique

$$\begin{aligned} \min \quad & (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 3)^2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \\ & 2x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ & x_1 + x_2 \leq 5. \end{aligned}$$

1. Trouver la solution optimale en résolvant le système de Kuhn-Tucker. Illustrer géométriquement.
2. Effectuer trois itérations de la méthode du gradient réduit, en utilisant le point (0,3) comme point initial. Soit, à une itération donnée, $\alpha_{\max}$ la valeur maximale que peut prendre le pas de déplacement. Déterminer la valeur du pas à l'aide du critère d'Armijo:

$$\alpha = \alpha_{\max} / \eta^k$$

où k est le plus petit entier positif ou nul tel que

$$\frac{\phi(\alpha) - \phi(0)}{\alpha - 0} \leq \epsilon \phi'(0).$$

Illustrer géométriquement les trois itérations.

3. Comparer les directions obtenues avec les directions du gradient projeté sur les contraintes actives.
4. Toujours en utilisant le point (0,3) comme point initial, effectuer 2 itérations de l'algorithme de Frank-Wolfe.