

IFT 6575 DEVOIR 3

(à remettre le mardi 20 novembre au début du cours)

1 _____ (15 points)

Formuler les contraintes suivantes comme des contraintes linéaires impliquant des variables entières. Dans tous les cas, faire l'hypothèse que les variables x_j appartiennent à l'intervalle $[0, M]$.

- $u = \min\{x_1, x_2\}$.
- $u = |x_1 - x_2|$.
- $x_1 x_2 = 0$.
- $u \in X - \{a\}$, où $a \in X$ et $X = \{x \in Z^n : Ax \leq b\}$.

2 _____ (10 points)

Une machine doit effectuer n tâches de façon séquentielle. Sachant que la durée d'exécution de chaque tâche est de p_j heures, formuler un programme en nombres entiers permettant de minimiser la somme *pondérée* des instants de début des tâches. Noter par w_j le poids associé à la tâche j .

3 _____ (15 points)

Résoudre le programme suivant par un algorithme d'énumération implicite.

$$\begin{array}{rclcl} \max_{x \in Z_+^2} & 9x_1 & + & 5x_2 & \\ & 4x_1 & + & 9x_2 & \leq 35 \\ & x_1 & & & \leq 6 \\ & x_1 & - & 3x_2 & \geq 1 \\ & 3x_1 & + & 2x_2 & \leq 19 \end{array} .$$

Illustrer géométriquement la progression de l'algorithme.

4 _____ (15 points)

Soit le problème de localisation (demande unitaire, capacités infinies) caractérisé par la matrice de coûts de transport

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 4 & 10 & 2 & 6 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & 8 & 6 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

et le vecteur de coûts fixes

$$f = (4, 8, 11, 7, 5).$$

En partant du vecteur dual $u = (5, 6, 3, 2, 6, 4)$, évaluer la fonction duale $L(u)$ et obtenir une borne inférieure sur la valeur optimale. À partir du vecteur $(x(u), y(u))$, construisez une "bonne" solution primale. Pouvez-vous déterminer l'écart entre la valeur de cette solution et la valeur de la solution optimale?

5 _____ **(15 points)**

Soit le problème de sac-à-dos:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ & \sum_{j=1}^n w_j x_j \leq k, \end{aligned}$$

avec

$$\frac{c_1}{w_1} \geq \frac{c_2}{w_2} \geq \dots \geq \frac{c_n}{w_n}.$$

On peut résoudre ce problème récursivement à l'aide de l'équation de programmation dynamique

$$z(k) = \max_{j:w_j \leq k} \{c_j + z(k - w_j)\}.$$

- Soit $i(k)$ le plus petit indice pour lequel le maximum est atteint dans l'équation précédente. Démontrer l'identité

$$i(k) \leq i(k - w_{i(k)}).$$

- Soit n un entier tel que $i(k) = 1$ pour tout $k = n + 1, n + 2, \dots, n + \max\{w_j\}$. Démontrer qu'on a alors $i(k) = 1$ pour tout $k > n$.

6 _____ **(10 points)**

Dans l'exemple vu en cours, déterminer la coupe de Gomory correspondant à la variable fractionnaire x_2 , à partir de l'équation

$$x_2 = \frac{9}{4} - \frac{9}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4,$$

puis trouver géométriquement la solution optimale du problème incluant la coupe.

7 _____ **(10 points)**

On considère un graphe connexe où les arcs possèdent des coûts positifs. Proposer un algorithme permettant de déterminer un arbre tel que le produit des coûts de ses arcs soit le plus élevé possible.

8 _____ **(10 points)**

Soit T un arbre sous-tendant minimal d'un graphe G . Décrire un algorithme permettant de déterminer un arbre sous-tendant minimal dans le graphe $G \cup \{a\}$, où a est un nouvel arc. Quelle est la complexité (efficacité) de votre algorithme? Répondre à la même question pour le graphe $G - \{a\}$.