IFT 6575 DEVOIR 4

(à remettre avant le lundi 10 décembre)

1 _____ (20 points)

Résoudre le programme stochastique décrit en

<http://www.iro.umontreal.ca/~marcotte/Ift3651/PDM.pdf>

à l'aide de l'algorithme d'amélioration des politiques et l'algorithme d'approximations successives.

2 _____ (15 points)

Démontrer qu'une matrice stochastique $A : 2 \times 2$ est une matrice de transition *sur deux étapes* si et seulement si la somme de ses éléments diagonaux est supérieure à 1.

3 _____ (15 points)

Soit la matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} & \frac{7}{8} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Trouver les classes et déterminer les probabilités stationnaires. Ces dernières sont-elles des probabilités limite?

4 _____ (15 points)

Soient X et Y des variables exponentielles indépendantes, de paramètres respectifs λ et μ . On définit les variables aléatoires:

$$\begin{aligned} N &= \begin{cases} 1 & \text{si } X \leq Y \\ 2 & \text{sinon.} \end{cases} \\ U &= \min\{X, Y\} \\ V &= \max\{X, Y\} \\ W &= V - U. \end{aligned}$$

Démontrer que:

1. $P\{N = 1\} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$.
2. $P\{U \geq t\} = \exp(-(\lambda + \mu)t)$.
3. N et U sont indépendantes.
4. $P\{W \geq t : N = 1\} = \exp(-\mu t)$.
5. V et W sont indépendantes.

5 _____ (10 points)

Une boutique d'ordinateurs ne peut stocker plus de 3 ordinateurs à la fois. Les clients se présentent à la boutique selon un processus de Poisson au rythme de 4 par semaines, et la probabilité qu'ils achètent est *inversement proportionnelle* aux nombres de machines en stock, à condition bien évidemment que ce nombre soit au moins égal à un! Lorsque le nombre de machines en stock est égal à 1, le magasin en commande 2 autres. On suppose que le délai de livraison suit une loi exponentielle de moyenne 1 (une semaine).

1. Quelle est le générateur infinitésimal de cette chaîne de Markov continue?
2. Quelles sont les probabilités stationnaires?
3. Quel est le taux de vente de la boutique?

6 _____ (10 points)

Des voyageurs se présentent au guichet automatique d'une compagnie aérienne afin d'obtenir leur carte d'embarquement. Le taux d'arrivée est égal à λ . Le temps nécessaire pour obtenir le document est de 50 (unités de temps) en mode self-service, et de 30 si un employé de la compagnie est présent. Déterminer la longueur moyenne de la file d'attente (à long terme) dans les deux cas, c'est-à-dire avec *ou* sans employé affecté à l'aide aux usagers.

7 _____ (15 points)

Soit $X(t)$ un processus de Poisson. Pour $t > s$, donner une expression pour le coefficient de corrélation entre $X(s)$ et $X(t)$.

Note: Utiliser les probabilités conjointes $P\{X(s) = n, X(t) = n + k\}$. Je rappelle que $\text{Cov}[X, Y] = E[XY] - E[X]E[Y]$ et que $\text{Corr}[X, Y] = \text{Cov}[X, Y]/\sigma_X\sigma_Y$.