

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL
DÉPARTEMENT D'INFORMATIQUE ET DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE
EXAMEN FINAL

MÉTHODES DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

Auteur : Patrice MARCOTTE

Date: Vendredi 14 décembre 2007
Heure: 14h00 à 17h00
Salle: Salle AA1411, pavillon André-Aisenstadt

DOCUMENTATION AUTORISÉE : 5 PAGES MANUSCRITES

LA CALCULATRICE EST NON SEULEMENT INTERDITE, MAIS INUTILE

On considère le problème de flot à coût minimal basé sur la figure ci-dessous, où les nombres représentent les coûts associés aux arcs.

Effectuer une itération de l'algorithme du simplexe à partir de la solution initiale admissible

$$x^0 = [x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{23}, x_{25}, x_{26}, x_{36}, x_{42}, x_{45}, x_{56}] = [0, 8, 0, 6, 0, 2, 0, 5, 0, 0].$$

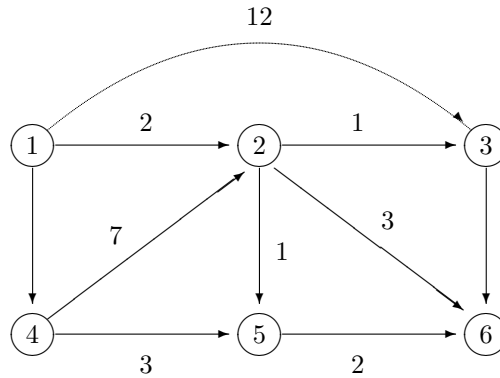


Figure 1: Réseau. Les nombres représentent les coûts des arcs

Effectuer toutes vos opérations sur des copies du réseau et suivre les consignes suivantes.

- Trouver un vecteur de demande $b = (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6)$ compatible avec le vecteur x^0 ; ce vecteur est-il unique?
- Tracer un arbre sous-tendant T compatible avec le vecteur de flots courants;
- donner la valeur de l'objectif;
- choisir une racine de T et établir les quantités (variables duales) y_i ;
- trouver un arc de coût réduit négatif;
- indiquer l'arc sortant;
- donner la nouvelle valeur de l'objectif;
- trouver une solution en terme de flots sur des *chemins*, par opposition à flots sur les *arcs*. Cette solution est-elle unique?

Soit le programme linéaire

$$\begin{array}{ll} \min_{x,y} & (c+t)x + dy \\ \text{s.à} & Ax + By = b \\ & x, y \geq 0, \end{array}$$

où t est un vecteur de taxes ajoutées au vecteur de coût c , qui n'affecte qu'un sous-ensemble des "produits".

- Écrire les conditions d'optimalité du programme linéaire, sous forme de réalisabilité et de complémentarité primale-duale, en utilisant la lettre λ pour désigner le vecteur dual.
- Afin de maximiser le revenu, on souhaite maximiser l'expression tx , en tenant compte du fait que x est solution (partielle) du programme linéaire précédent, c'est-à-dire:

$$\begin{array}{ll} \max_{t,x,y} & tx \\ \text{s.à} & x \in X, \end{array}$$

où X est l'ensemble des solutions optimales que vous venez de caractériser. On suppose que l'ensemble $\{y \geq 0 : By = b\} \neq \emptyset$, sinon on obtient un revenu infini en posant $t = +\infty$.

1. Montrer que, sans perte de généralité, on peut poser:

$$t = \lambda A - c.$$

2. En substituant t par cette valeur, montrer qu'on peut maximiser le revenu en résolvant le programme non linéaire

$$\begin{array}{ll} (P) & \max_{x,y} \quad \lambda b - (cx + dy) \\ & \text{s.à} \quad Ax + By = b \\ & \quad x, y \geq 0 \\ & \quad \lambda B \leq d \\ & \quad (d - \lambda B)y = 0. \end{array}$$

3. Donner une formulation linéaire en nombres entiers du programme mathématique (P) .
4. Une borne supérieure sur la valeur optimale de (P) peut être obtenue en laissant tomber la contrainte de complémentarité. On obtient alors deux programmes linéaires indépendants, l'un en (x, y) et l'autre en λ . Écrire le dual du problème en λ et en déduire une interprétation intuitive de cette borne supérieure.

3 _____ **(25 points)**

Soit f une fonction différentiable et $X = \{x : Ax \leq b\}$. On considère le programme non linéaire

$$\min_{x \in X} f(x).$$

En un point réalisable $\bar{x}$, soit $\bar{X} = \{A_0 x = b_0\}$ l'ensemble des contraintes satisfaites à égalité au point $\bar{x}$. On pose $\bar{g} = -\nabla f(\bar{x})$ et on résout le problème quadratique

$$(Q) \quad \min_{y \in \bar{X}} \|y - (\bar{x} + \bar{g})\|^2,$$

dont la solution optimale est notée $\bar{y}$.

1. Donner une interprétation géométrique du problème (Q) .
2. Écrire les conditions de KKT du problème quadratique.
3. Si $\bar{x}$ est un point de KKT du problème de départ, sera-t-il aussi un point de KKT du problème quadratique (Q) ? Justifier votre réponse.
4. Inversement, si $\bar{x}$ est un point de KKT du problème (Q) , sera-t-il aussi un point de KKT du problème initial? Justifier votre réponse.
5. Déterminer de façon explicite $\bar{y}$.

4 _____ **(20 points)**

On cherche à déterminer un hyperplan séparant le mieux possible deux ensembles de points $\{x^i\}_{i \in I}$ et $\{y^j\}_{j \in J}$ dont les éléments appartiennent tous à R^n . Si les enveloppes convexes des deux ensembles ont une intersection vide, formuler ce problème comme un programme quadratique convexe. Vous êtes libre de choisir le critère de séparation.

Si les enveloppes convexes ne sont pas disjointes, donner une formulation linéaire mixte permettant de minimiser le nombre de points mal classés.

Note: on rappelle que la distance d'un point $\bar{x}$ à l'hyperplan d'équation $ax + b = 0$ est $|a\bar{x} + b|/\|a\|$, où $\|a\|$ représente la norme euclidienne.

5 _____ **(20 points)**

On considère un sport opposant deux joueurs A et B, et où un point ne peut être compté que si le joueur possède le "service" et gagne l'échange. Si le joueur qui possède le service perd l'échange, alors il donne le service à son adversaire, qui essaie à son tour de compter un point, et ainsi de suite. On suppose qu'au début de la partie, le joueur A est en possession du service.

Soit p la probabilité que le joueur possédant le service gagne l'échange, et compte donc un point. La partie est gagnée par le premier joueur qui atteint 10 points.

1. Formuler un modèle markovien permettant de déterminer la probabilité α que le joueur A remporte la partie. Bien spécifier les états de la chaîne de Markov, leur nature, ainsi que les probabilités de transition.
2. Dans certains sports, la partie se poursuit au-delà de 10 points si le score est de 10 à 9 en faveur du meneur, jusqu'à ce que la différence des points entre les deux joueurs soit égale à 2. Modifier votre modèle pour tenir compte de cette exigence.
3. Bonus de 10 points: Montrer comment déterminer α à l'aide de la programmation dynamique. Cette approche algorithmique est-elle préférable à celle que vous avez proposée en 1?