

À remettre le mercredi 1er octobre avant la fin du cours

1 _____ (15 points)

À l'aide de la méthode du simplexe, puis graphiquement (sur le problème dual), trouver *toutes* les solutions optimales du programme linéaire:

$$\begin{aligned} \max_{x \geq 0} \quad & 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \leq 5 \\ & x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leq 3 \quad . \end{aligned}$$

2 _____ (15 points)

Dans le dictionnaire ci-dessous, le coût réduit d est positif. Déterminer, si possible, des valeurs des coefficients a , b , c et d tels que, après une itération de l'algorithme du simplexe

- la solution soit optimale et unique;
- la solution soit optimale mais non unique;
- la solution soit optimale et dégénérée;
- le problème soit non borné.

	x_4	x_1	x_6	x_7	
max	25	-3	-2	-2	d
x_3	1	a	3	-1	0
x_2	6	-1	4	2	b
x_5	5	2	-1	c	4

3 _____ **(15 points)**

Effectuer trois itérations du simplexe pour le PFCM dont les données sont

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & & & 1 & & & & & & & & & \\ & 1 & & -1 & & & & & 1 & & & & & \\ & & & 1 & -1 & -1 & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & -1 & -1 & & & & & & \\ & & & & & 1 & & & -1 & -1 & & & & \\ & & & & 1 & & & & & & -1 & 1 & & \\ & & & & & & 1 & & & & 1 & & -1 & \\ & & & & & & & 1 & & & & -1 & 1 & \\ & & & & & & & & 1 & & & & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b = [-2, -1, 2, -6, 1, 0, 3, 3]^t$$

$$c = [3, 1, 0, 0, 1, 2, 4, 2, 3, 1, 1, 0]$$

Utiliser le sommet 4 comme racine et le vecteur

$$x = [0, 2, 2, 0, 0, 2, 6, 1, 0, 0, 0, 3]$$

comme solution initiale. À chaque itération

- tracer l'arbre courant avec les flots sur les arcs
- donner la valeur de l'objectif
- établir les quantités y_i
- trouver un arc de coût réduit négatif
- indiquer l'arc sortant
- donner la nouvelle valeur de l'objectif

Vous pouvez indiquer ces informations sur le graphe. Je suggère de tracer le graphe de façon visuellement agréable (le graphe admet une représentation planaire).

4 _____ **(15 points)**

Sans résoudre le problème, déterminer si le vecteur $(0, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 0)$ est une solution optimale du programme linéaire

$$\max_{x \geq 0} \quad 7x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5$$

$$x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 2x_5 \leq 4$$

$$4x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 \leq 3$$

$$2x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 2x_4 + 5x_5 \leq 5$$

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 - 2x_5 \leq 1 \quad .$$

5 _____ **(10 points)**

Écrire le dual du programme linéaire

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 - x_2 \\ & 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 \leq 0 \\ & 3x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 \geq 3 \\ & -x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ & x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

6 _____ **(15 points)**

En construisant un programme linéaire adéquat et son dual, démontrer qu'exactement l'un des deux systèmes suivants doit être satisfait:

$$\begin{aligned} Ax &\geq 0 & yA &< 0 \\ x &\geq 0 & y &\geq 0 \\ x &\neq 0 \end{aligned}$$

En déduire que, si A est une matrice semidéfinie positive ($xAx \geq 0$ pour tout $x \in R^n$), il existe toujours une solution non nulle au système $Ax \geq 0, x \geq 0$.

7 _____ **(15 points)**

Considérer le programme linéaire

$$\begin{aligned} \min \quad & cx \\ & Ax = b \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

Qu'advient-il de la solution du problème dual si

1. Une contrainte est multipliée par un scalaire?
2. On ajoute un multiple d'une contrainte à une autre contrainte?
3. On ajoute un multiple d'une ligne de la matrice A au vecteur c ?