

À remettre le mercredi 28 octobre avant la fin du cours

1 _____ (15 points)

- Démontrer que la fonction x^2/y est convexe pour $y \geq 0$ en montrant que son hessien est défini positif.
- Soit f une fonction convexe positive et g une fonction concave positive. Démontrer à partir de la définition que la fonction f^2/g est convexe, ce qui généralise le cas précédent.
- À votre avis, quelle approche est la plus simple?

2 _____ (15 points)

En partant du point $(0,1)$, déterminer de façon analytique la suite de points engendrée par la méthode de Frank et Wolfe pour le programme mathématique

$$\begin{array}{ll} \min_{x,y} & \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \\ \text{sujet à} & x + y \leq 1 \\ & -x + y \leq 1 \\ & y \geq 0. \end{array}$$

En déduire que la suite converge de façon harmonique ($O(1/n)$) vers la solution optimale $(0,0)$.

3 _____ (15 points)

[BSS, 2e édition, #6.19 page 235] Soit le programme mathématique

$$\begin{array}{ll} \min & x_1^2 + x_2^2 \\ \text{sujet à} & x_1 + x_2 - 4 \geq 0 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{array}$$

- Vérifier que la solution optimale est $(2,2)$.
- Soit $X = \{x \geq 0\}$. Écrire le dual lagrangien et montrer que la fonction duale est $-y^2/2 + 4y$. Vérifier que le saut de dualité est nul pour ce problème.

4 _____ (15 points)

[BSS, 2e édition, #9.3 page 399] On cherche à déterminer un point x qui minimise la distance aux 4 points suivants: $(1,2)$, $(-2,4)$, $(2,6)$ et $(-6,-3)$. On exige que $x_1 + x_2 = 2$ et que les coordonnées de x soit non négatives.

- Formuler le problème.
- Montrer que la fonction objectif est convexe.
- Résoudre le problème à l'aide des conditions de Kuhn-Tucker.
- Résoudre le problème par une méthode de pénalité.

5 _____ (15 points)

[BSS, 2e édition, #10.5 page 475] Pour un problème avec contraintes non linéaires, l'algorithme de Zoutendijk cherche une direction de descente en linéarisant les contraintes (actives). Sinon, les opérations sont les mêmes que dans le cas avec contraintes linéaires.

En partant du point $(1, 1)$, effectuer une itération de l'algorithme de Zoutendijk sur le programme quadratique

$$\begin{array}{ll} \min & (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 \\ \text{sujet à} & x_1^2 - x_2 \leq 0 \\ & x_1 - 2x_2 + 1 = 0 \end{array}$$

avec les normalisations $|d_j| \leq 1$.

6 _____ (10 points)

[Luenberger, 2e édition, #6 page 233] Pour $a > 0$, soit la suite

$$x_{k+1} = \frac{1}{2} \left(x_k + \frac{a}{x_k} \right).$$

Si la suite converge, quel est son point limite? Quel est l'ordre de convergence? La suite converge-t-elle toujours?

7 _____ (10 points)

[Luenberger, 2e édition, #12 page 233] Soit le programme quadratique

$$\min \quad 5x^2 + 5y^2 - xy - 11x + 11y + 11.$$

- Trouver un point satisfaisant les conditions d'optimalité du premier ordre et montrer que c'est un minimum global.
- Quel est le taux de convergence de la méthode de la plus forte pente (gradient) pour ce problème?
- Combien d'itérations de la méthode du gradient seraient requises pour que l'erreur concernant l'objectif soit inférieure à 10^{-11} , en partant du point initial $(0,0)$?

8 _____ (10 points)

Soit X un ensemble. On considère le programme mathématique

$$\begin{aligned} \min_x \quad & f(x) \\ \text{sujet à} \quad & g_i(x) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m \\ & x \in X \end{aligned}$$

et son lagrangien

$$L(x, y) = f(x, y) + \sum_{i=1}^m y_i g_i(x).$$

Un point (x^*, y^*) ($x^* \in X$, $y^* \geq 0$) est un point de selle du lagrangien si

$$f(x^*) + \sum_{i=1}^m y_i g_i(x^*) \leq f(x^*) + \sum_{i=1}^m y_i^* g_i(x^*) \leq f(x) + \sum_{i=1}^m y_i^* g_i(x)$$

pour tout $x \in X$ et $y \geq 0$.

Démontrer que tout point de selle du lagrangien est une solution *globale* du problème originel. Quelles hypothèses avez-vous faites sur les fonctions f et g et l'ensemble X ?