

À remettre le lundi 9 décembre

1 _____ (25 points)

Comparer (nombre moyen de clients dans le système, temps moyen passé dans le système, probabilités stationnaires du nombre de clients dans le système) les trois systèmes suivants:

- file $M/M/1$ où le taux d'arrivée est λ et le taux de service μ ;
- file $M/M/1$ où le taux d'arrivée est 2λ et le taux de service 2μ ;
- file $M/M/2$ où le taux d'arrivée est 2λ et le taux de service μ pour chaque serveur;
- file $M/E_2/1$ où le taux d'arrivée est λ et E_2 (loi d'Erlang) est la somme de 2 exponentielles de moyenne $1/2\mu$.

Lequel de ces systèmes vous semble le plus efficace?

2 _____ (20 points)

[Taylor and Karlin, numéro 6.2 du chapitre VI]

Un système est composé de trois machines qui tombent en panne et se font réparer suivant des lois exponentielles indépendants (voir tableau ci-dessous). Sachant que, pour que le système soit opérationnel, la machine A et au moins l'une des deux autres machines doivent être fonctionnelles, déterminer la proportion du temps où le système est fonctionnel, à long terme.

Machine	Taux de panne	Taux de réparation
A	β_A	α_A
B	β_B	α_B
C	β_C	α_C

3 _____ **(40 points)**

Dans les anciennes règles du volleyball, un point ne peut être marqué que lorsque l'on possède le service. L'équipe au service le conserve tant qu'elle remporte l'échange.

Soit p_i ($i = 1, 2$) la probabilité que l'équipe i gagne l'échange alors qu'elle est en possession du service. Dans un set de n points, la partie est remportée par la première équipe qui atteint n points, à condition que la différence de points excède 2. Sinon, le score doit éventuellement être égal à $n-1$, et le set se termine lorsque la différence de points atteint 2. On suppose que l'équipe i possède le premier service.

1. Décrire le déroulement d'un set de n points comme une chaîne de Markov absorbante.
2. Montrer comment déterminer la durée moyenne d'un set ainsi que la probabilité de victoire de l'équipe i . Calculer ces quantités lorsque $p_1 = p_2 = 1/2$ et $n = 5$. Calculer également la probabilité que le set se rende en "prolongation", c'est-à-dire que l'équipe gagnante ait plus de 5 points à la fin du set.
3. Soit $p_1 = 1/2$. Quelle devrait être la valeur de p_2 pour que la probabilité de victoire de chaque équipe soit égale à $1/2$?

4 _____ **(20 points)**

Un autobus quitte la ville A avec n passagers à bord, et dessert un certain nombre d'arrêts. À chaque arrêt, un passager descend et marche jusqu'à son domicile. Sachant que le temps de marche suit une loi exponentielle de paramètre μ et que la durée du trajet entre deux arrêts est exponentielle de paramètre λ ,

- Déterminer la distribution de l'instant auquel le dernier passager quitte l'autobus.
- Soit t l'instant auquel le dernier passager quitte l'autobus. Quelle est la probabilité que tous les autres passagers aient rejoint leur domicile à ce moment?