

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL
DÉPARTEMENT D'INFORMATIQUE ET DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE
EXAMEN FINAL

MÉTHODES DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

Auteur : Patrice MARCOTTE

Date: Lundi 15 décembre 2008
Heure: 9h30 à 12h30
Salle: Salle AA1411, pavillon André-Aisenstadt

TOUTE DOCUMENTATION AUTORISÉE

LA CALCULATRICE EST NON SEULEMENT INTERDITE, MAIS INUTILE

1 _____ (20 points)

Soit le programme mathématique

$$\min_{x \in X} x_1^2 + 2x_2^2,$$

où X est l'enveloppe convexe des points

$$(4, 0), (0, 4), (6, 2), (3, 6), (2, 4).$$

Trouver, de façon géométrique et à partir du point $(6, 2)$, les directions de descente associées aux algorithmes de Frank et Wolfe, de Zoutendijk et des deux versions du gradient projeté vues en cours. Ensuite, trouver une solution optimale du problème et démontrer qu'elle satisfait aux conditions d'optimalité de Kuhn et Tucker (**Indice:** Essayer de “deviner” sur quel segment du polyèdre se trouve votre solution). Cette solution est-elle l'unique solution satisfaisant les conditions d'optimalité du premier ordre?

2 _____ (10 points)

Une fonction réelle f est *quasiconvexe* si, pour tout $\lambda \in [0, 1]$, on a

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \max\{f(x), f(y)\}.$$

Si X est un sous-ensemble convexe de R^n démontrer que, si le programme mathématique

$$\max_{x \in X} f(x)$$

admet une solution optimale, alors il existe une solution optimale située en un point extrémal de X , sous l'hypothèse que la fonction f est quasiconvexe.

3 _____ (10 points)

Soit le programme mathématique fractionnaire:

$$\begin{array}{ll} \min_x & \frac{x_1 + 3x_2 + 3}{2x_1 + x_2 + 6} \\ \text{sujet à} & 2x_1 + x_2 \leq 12 \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{array}$$

- Montrer qu'il est possible de ramener ce problème à un programme linéaire et en déduire que tout point de Kuhn-Tucker est un optimum global.
- Montrer que tout point du segment joignant les points $(0,0)$ et $(6,0)$ est optimal.

4 _____ (10 points)

Soit $g(\alpha)$ la valeur optimale du programme linéaire paramétrique

$$\begin{array}{ll} \min_x & (c + \alpha d)x \\ \text{sujet à} & Ax \leq b. \end{array}$$

Montrer que g est concave. En utilisant un argument de dualité, en déduire que la valeur optimale $h(\beta)$ du programme linéaire paramétrique

$$\begin{array}{ll} \min_x & cx \\ \text{sujet à} & Ax \leq b + \beta e \end{array}$$

est convexe.

5

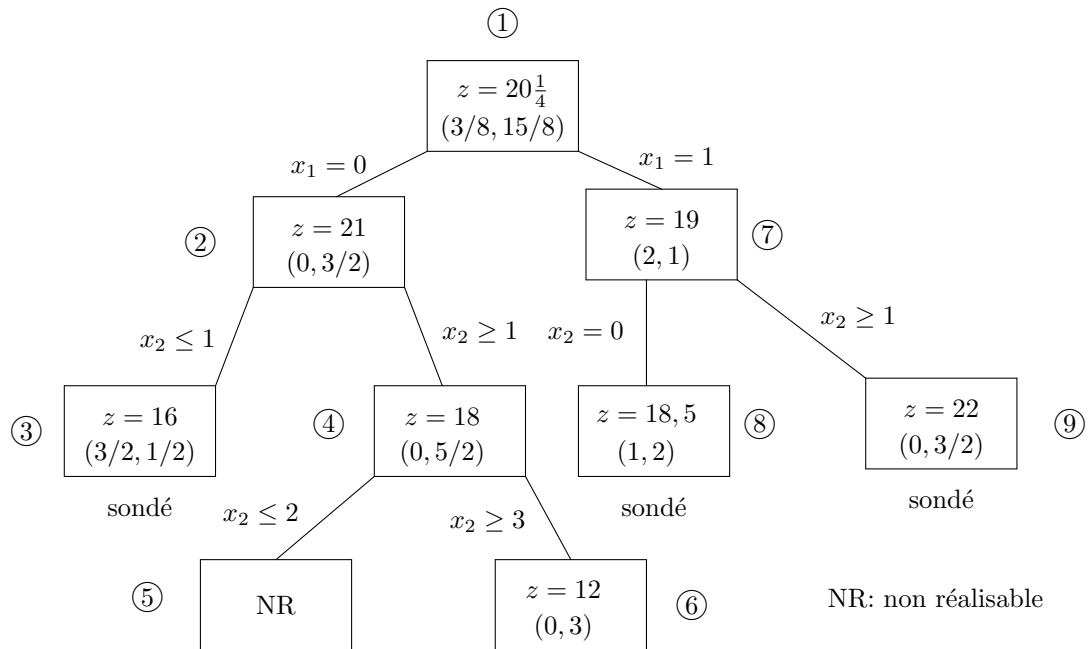
(10 points)

Soit le programme linéaire en variables entières

$$\begin{aligned} \max \quad & c_1 x_1 + c_2 x_2 \\ \text{s.t.} \quad & Ax \leq b \\ & x_1, x_2 \text{ entiers non négatifs.} \end{aligned}$$

où les coefficients c_1 et c_2 sont entiers.

En appliquant la technique de branch-and-bound (parcours de l'arbre **en profondeur**) un étudiant obtient l'arbre d'énumération partiel suivant, où sont indiquées la valeur z et la solution optimale de la relaxation linéaire. Identifier 5 erreurs grossières ou impossibilités lors du parcours de cet arbre.



6

(10 points)

Soit le problème de sac-à-dos

$$\begin{aligned} \min_x \quad & \sum_j c_j x_j \\ \text{sujet à} \quad & \sum_j w_j x_j \leq b. \end{aligned}$$

Discuter des mérites respectifs des stratégies de programmation dynamique et de branch-and-bound pour le résoudre.

7 _____ (10 points)

Le problème d'arbre sous-tendant minimal consiste à déterminer un arbre d'un graphe non orienté dont la somme des poids (ou "coûts") des arcs est minimale. Formuler ce problème comme un programme linéaire avec variables entières.

8 _____ (10 points)

Un couplage dans un graphe non orienté est un ensemble d'arcs non adjacents (deux arcs ne peuvent être incidents à un sommet commun). On cherche à déterminer un couplage de cardinalité maximale.

- Formuler ce problème comme un programme linéaire en nombres entiers.
- Montrer que la solution de la relaxation linéaire de votre formulation n'est pas nécessairement entière (**Indice**: considérer des cycles contenant un nombre impair d'arcs).

9 _____ (20 points)

La loi d'Erlang E_2 est définie comme la somme de deux lois exponentielles indépendantes. On considère une file d'attente $M/E_2/1$ où le temps de service suit une loi d'Erlang E_2 , et où les clients ne se joignent pas à la file s'il y a déjà un client en attente. Formuler cette situation comme une chaîne de Markov continue en spécifiant les états ainsi que le générateur infinitésimal du processus stochastique.