

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL
DÉPARTEMENT D'INFORMATIQUE ET DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE
EXAMEN FINAL

MÉTHODES DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

Auteur : Patrice MARCOTTE

Date: Mardi 12 mars 2009

Heure: 9h30 à 12h30

DOCUMENTATION AUTORISÉE

LIVRE DE BAZARAA, SHERALI ET SHETTY
NOTES DE COURS EN PROCESSUS STOCHASTIQUES

LA CALCULATRICE EST NON SEULEMENT INTERDITE, MAIS INUTILE

1 _____ (20 points)

Soit le programme non linéaire

$$\begin{aligned} \max_{x,y} \quad & x + \alpha y \\ & x + y \leq 2 \\ & (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 1 \quad , \end{aligned}$$

où α est un paramètre.

- Écrire les conditions de Kuhn et Tucker de ce programme.
- Dessiner le domaine réalisable. Ce domaine est-il convexe? Justifier votre réponse.
- Trouver une valeur du paramètre α pour laquelle deux contraintes sont actives à l'optimum. Trouver les multiplicateurs de Lagrange associés.
- Trouver une valeur du paramètre α pour laquelle la solution optimale est unique et une seule contrainte est active à l'optimum. Trouver les multiplicateurs de Lagrange associés.
- Existe-t-il des valeurs du paramètre α pour lesquelles aucune contrainte n'est active à l'optimum?

2 _____ (20 points)

Soit A une matrice carrée semi-définie positive, c'est-à-dire: $x^t A x \geq 0$ pour tout vecteur x . Démontrer qu'il existe un vecteur $x \geq 0$ (toutes ses composantes sont non négatives) tel que $Ax \geq 0$, en suivant la démarche suivante:

1. Considérer le programme linéaire PRIMAL

$$\begin{aligned} \max_{x \geq 0} \quad & \sum_j x_j \\ \text{sous la contrainte} \quad & Ax \geq 0. \end{aligned}$$

2. Écrire le problème DUAL de PRIMAL et montrer que son domaine admissible est vide.
3. En déduire que le programme PRIMAL doit posséder une solution non nulle.
4. Conclure.
5. Si la matrice A est symétrique, montrer qu'on peut démontrer le résultat précédent à partir des conditions de Kuhn et Tucker du programme quadratique convexe

$$\begin{aligned} \min_x \quad & x^t A x \\ \text{sous la contrainte} \quad & \sum_j x_j \geq 1. \end{aligned}$$

Indice: montrer que le multiplicateur de Lagrange ne peut être négatif.

3 _____ **(20 points)**

Soit une chaîne de Markov $\{X_n\}$ définie sur les états 0, 1 et 2, et de matrice de transition

$$P = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} & \left[\begin{array}{ccc} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 1-p & 0 & p \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \end{array} \right] \end{array} .$$

Soit $X_0 = 0$. À partir de cette chaîne, on définit le jeu suivant. Un joueur paie 5\$ pour jouer et gagne 1\$ à chaque transition. Le jeu s'arrête à l'instant $n \geq 1$ où $X_n = 0$.

Déterminer une valeur de p qui soit équitale, c'est-à-dire telle que l'espérance du gain du joueur soit nulle.

4 _____ **(20 points)**

Le problème de l'arbre sous-tendant minimal consiste à déterminer, dans un graphe connexe non orienté de n sommets, un arbre comportant $n - 1$ arcs et de coût minimal (les coûts sont associés aux arcs du graphe). Formuler ce problème comme un programme linéaire en nombres entiers.

5 _____ **(20 points)**

Le vecteur $(0, 4, 2, 5, 0)$ est-il une solution optimale du programme linéaire

$$\begin{aligned} \max_{x \geq 0} \quad & 7x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 \\ & x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 2x_5 \leq 12 \\ & 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 \leq 9 \\ & 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 2x_4 + 5x_5 \leq 15 \\ & 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 - 2x_5 \leq 3 \quad ? \end{aligned}$$

Soit le programme linéaire en variables entières

$$\begin{aligned} \max \quad & c_1 x_1 + c_2 x_2 \\ Ax \leq b \\ x_1, x_2 \text{ entiers non négatifs.} \end{aligned}$$

où les coefficients c_1 et c_2 sont entiers et positifs.

En appliquant la technique de Branch-and-Bound (parcours de l'arbre **en largeur**) un étudiant obtient l'arbre d'énumération partiel suivant, où sont indiquées la valeur z et la solution optimale de la relaxation linéaire. Identifier 5 erreurs grossières ou impossibilités lors du parcours de cet arbre.

