

À remettre le mardi 29 septembre au début du cours

1 _____ (15 points)

On considère un polyèdre dont les points extrêmes sont $(2,0)$, $(0,4)$, $(2,6)$ et $(6,3)$. Soit le programme linéaire correspondant à la maximisation de $2x_1 + x_2$ sur ce polyèdre.

1. Donner une représentation algébrique du programme linéaire et résolvez-le à l'aide de l'algorithme du simplexe.
2. Ajouter la contrainte $x_2 \leq x_1 - 3$ et trouver, à l'aide d'arguments géométriques, TOUTES les solutions du problème dual.

2 _____ (15 points)

Dans le dictionnaire ci-dessous, le coût réduit d est positif. Déterminer, si possible, des valeurs des coefficients a , b , c et d tels que, après une itération de l'algorithme du simplexe

- la solution soit optimale et unique;
- la solution soit optimale mais non unique;
- la solution soit optimale et dégénérée;
- le problème soit non borné.

		x_4	x_1	x_6	x_7
max	25	-3	-2	-2	d
x_3	1	a	3	-1	0
x_2	6	-1	4	2	b
x_5	5	2	-1	c	4

3 _____ (10 points)

Vrai ou faux: la solution du problème dual est unique si et seulement si la solution optimale du problème primal est non dégénérée?

6 _____ (15 points)

Sans résoudre le problème, déterminer si le vecteur $(0, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 0)$ est une solution optimale du programme linéaire

$$\begin{aligned} \max_{x \geq 0} \quad & 7x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 \\ & x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 2x_5 \leq 4 \\ & 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 \leq 3 \\ & 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 2x_4 + 5x_5 \leq 5 \\ & 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 - 2x_5 \leq 1 \end{aligned} .$$

7 _____ (10 points)

Écrire le dual du programme linéaire

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 - x_2 \\ & 7x_1 + 5x_2 - x_3 - x_4 \leq 3 \\ & x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 \geq 7 \\ & -x_1 - x_2 + 8x_3 + x_4 = 1 \\ & x_1, x_3 \geq 0 \end{aligned} .$$

8 _____ (15 points)

Soient A et B deux systèmes d'inégalités linéaires, strictes ou non. Si l'ensemble des solutions de A est non vide si et seulement si l'ensemble des solutions de B ne l'est pas, le résultat est connu sous le nom de *théorème d'alternative*. Ces théorèmes permettent de démontrer le théorème de dualité forte en programmation linéaire. Inversement, on peut les déduire de la dualité forte.

Dans cet ordre d'esprit, démontrer qu'exactement l'un des deux systèmes suivants

$$\begin{array}{ll} Ax \geq 0 & yA < 0 \\ x \geq 0 & y \geq 0 \\ x \neq 0 & \end{array}$$

doit être satisfait en construisant un programme linéaire adéquat et son dual.

En déduire que, si A est une matrice semidéfinie positive ($xAx \geq 0$ pour tout $x \in R^n$), il existe toujours une solution non nulle au système $Ax \geq 0, x \geq 0$.