IFT 6575: DEVOIR 1

Patrice Marcotte

À remettre le mardi 29 septembre au début du cours

	(15 points)
On considère un polyèdre dont les points extrêmes sont (2,0), (6,3). Soit le programme linéaire correspondant à la maximisation ur ce polyèdre.	. , ,
1. Donner une représentation algébrique du programme linéaire à l'aide de l'algorithme du simplexe.	et résolvez-le
2. Ajouter la contrainte $x_2 \leq x_1 - 3$ et trouver, à l'aide d'argun triques, TOUTES les solutions du problème dual.	nents géomé-

2 ______ (15 points)

Dans le dictionnaire ci-dessous, le coût réduit d est positif. Déterminer, si possible, des valeurs des coefficients a, b, c et d tels que, après une itération de l'algorithme du simplexe

- la solution soit optimale et unique;
- la solution soit optimale mais non unique;
- la solution soit optimale et dégénérée;
- le problème soit non borné.

		x_4	x_1	x_6	x_7
max	25	-3	-2	-2	d
x_3	1	a	3	-1	0
x_2	6	-1	4	2	b
x_5	5	2	-1	c	4

Vrai ou faux: la solution du problème dual est unique si et seulement si la solution optimale du problème primal est non dégénérée?

4 ______ (20 points)

Intuitivement, on peut casser la dégénérescence en perturbant les contraintes d'un programme linéaire. Par exemple, on peut remplacer le membre de droite des contraintes (vecteur b) par le vecteur b+b', où $b'=(\epsilon,\epsilon^2,\ldots,\epsilon^m)$ (puissances succesives du scalaire positif ϵ). Montrer que, si ϵ est suffisamment petit, toute solution de base est non dégénérée.

Effectuer deux itérations du simplexe pour le PFCM dont les données sont

$$b = [-2, -1, 2, -6, 1, 0, 3, 3]^{t}$$
$$c = [3, 1, 0, 0, 1, 2, 4, 2, 3, 1, 1, 0]$$

À chaque itération

- tracer l'arbre courant avec les flots sur les arcs
- donner la valeur de l'objectif
- établir les quantités y_i
- trouver un arc de coût réduit négatif
- indiquer l'arc sortant
- donner la nouvelle valeur de l'objectif

Vous pouvez indiquer ces informations sur le graphe. Je suggère de tracer le graphe de façon visuellement agréable (le graphe admet une représentation planaire).

6 ______ (15 points)

Sans résoudre le problème, déterminer si le vecteur $(0, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 0)$ est une solution optimale du programme linéaire

7 _____ (10 points)

Écrire le dual du programme linéaire

$$\max x_1 - x_2$$

$$7x_1 + 5x_2 - x_3 - x_4 \le 3$$

$$x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 \ge 7$$

$$-x_1 - x_2 + 8x_3 + x_4 = 1$$

$$x_1, x_3 \ge 0$$

8 _____ (15 points)

Soient A et B deux systèmes d'inégalités linéaires, strictes ou non. Si l'ensemble des solutions de A est non vide si et seulement si l'ensemble des solution de B ne l'est pas, le résultat est connu sous le nom de théorème d'alternative. Ces théorèmes permettent de démontrer le théorème de dualité forte en programmation linéaire. Inversement, on peut les déduire de la dualité forte.

Dans cet ordre d'esprit, démontrer qu'exactement l'un des deux systèmes suivants

$$\begin{array}{ll} Ax \geq 0 & yA < 0 \\ x \geq 0 & y \geq 0 \\ x \neq 0 & \end{array}$$

doit être satisfait en construisant un programme linéaire adéquat et son dual.

En déduire que, si A est une matrice semidéfinie positive $(xAx \ge 0 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^n)$, il existe toujours une solution non nulle au système $Ax \ge 0$, $x \ge 0$.