

À remettre le mardi 27 octobre au début du cours

1 _____ (15 points)

Soit Q une matrice définie positive. On souhaite minimiser la fonction

$$f(x) = \frac{1}{2}x^t Q x + b^t x.$$

Si $\{x^k\}$ est la suite des itérés générés par la méthode du gradient, et x^* la solution optimale, on a l'inégalité:

$$(x^{k+1} - x^*)^t Q (x^{k+1} - x^*) \leq \left(\frac{A-a}{A+a} \right)^2 (x^k - x^*)^t Q (x^k - x^*).$$

Démontrer que le taux de convergence moyen de la suite $\{\|x^k - x^*\|^2\}$ est également égal à $\left(\frac{A-a}{A+a} \right)^2$.

Note: Le taux de convergence moyen d'une suite $\{r_k\}$ qui converge vers r^* est défini comme

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} |r_k - r^*|^{1/k}.$$

2 _____ (15 points)

Soit f une fonction convexe positive et g une fonction concave positive. Si f et g sont des fonctions deux fois continûment différentiables d'une seule variable, montrer que la dérivée seconde de f^2/g est positive, et en conclure que f^2/g est convexe. Dans un deuxième temps, démontrer, à partir de la définition, que f^2/g est convexe, dans le cas plus général où f et g sont des fonctions de plusieurs variables, et sans hypothèse de différentiabilité!

3 _____ (15 points)

(inspiré de BSS, 2e édition, exercice 4.1, page 173)

Soit le problème d'optimisation

$$\min x^2 - xy + 2y^2 - 2x + e^{x+y}.$$

1. Écrire les conditions d'optimalité du premier ordre. Ces conditions sont-elles suffisantes?
2. L'origine est-elle un point optimal? Si non, déterminer la direction de plus forte pente décroissante.
3. Minimiser la fonction le long de la direction obtenue précédemment.
4. Trouver la solution optimale du problème obtenu en ignorant le terme exponentiel.

4 _____ (15 points)

(inspiré de BSS, 2e édition, exercice 4.15, page 175)

Soit le programme fractionnaire:

$$\begin{aligned} \min_{x,y \geq 0} \quad & \frac{x + 3y + 3}{2x + y + 6} \\ & 2x + y \leq 12 \\ & -x + 2y \leq 4 \quad . \end{aligned}$$

1. Montrer que les conditions de KKT sont suffisantes pour ce problème.
2. Montrer que tous les points du segment $[(0, 0), (6, 0)]$ sont optimaux.
3. Montrer qu'on peut ramener le problème à un programme linéaire.

5 _____ (15 points)

(BSS 2e édition, exercice 4.18, page 176)

Soit le programme mathématique

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ & g_i(x) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned}$$

où toutes les fonctions sont continûment différentiables, et les fonctions g_i sont concaves. Soit \bar{x} un point réalisable et $I = \{i : g_i(\bar{x}) = 0\}$. On considère le programme linéaire:

$$\begin{aligned} \min_d \quad & \nabla f(\bar{x})d \\ & \nabla g_i(\bar{x})d \leq 0 \quad i \in I \\ & d_j \in [-1, 1] \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Soit \bar{d} une solution optimale de ce programme, et \bar{z} la valeur optimale correspondante.

1. Montrer que $\bar{z} \leq 0$.
2. Montrer que si $\bar{z} < 0$, alors il existe un scalaire $\delta > 0$ tel que $\bar{x} + \lambda \bar{d}$ est réalisable, et $f(\bar{x} + \lambda \bar{d}) < f(\bar{x})$ pour tout $\lambda \in (0, \delta)$.
3. Montrer que si $\bar{z} = 0$, alors \bar{x} est un point de KKT.

6 _____ **(15 points)**

Effectuer une itération des algorithmes de Frank et Wolfe et du gradient projeté (projection sur tout l'ensemble) sur le problème d'équilibre correspondant au paradoxe de Braess.

7 _____ **(10 points)**

Soient X et Y deux polytopes. Montrer qu'il existe une solution extrémale du programme *bilinéaire*

$$\max_{x \in X, y \in Y} x^t A y + b^t x + c^t y,$$

bien que l'objectif ne soit ni convexe ni concave.