

IFT 6575 DEVOIR 4

(à remettre le mercredi 9 décembre)

1 _____ (20 points)

Un ordinateur comprend 2 ventilateurs. Lorsque le premier tombe en panne, le second prend le relais. Lorsque les deux ventilateurs sont en panne, ils sont remplacés. La probabilité qu'un ventilateur tombe en panne à une journée donnée est de $1/5$ (pas vraiment fiable...) et le remplacement ne se fait que le jour suivant.

- Décrire la matrice de transition associée à cette chaîne de Markov.
- Calculer le temps moyen entre deux remplacements.
- Calculer le vecteur de probabilités stationnaires.
- Les probabilités limites existent-elles?

2 _____ (20 points)

Soit un processus de ramification où le nombre d'enfants est donné par une loi de Poisson de paramètre λ . Trouver la ou les valeurs de λ compatible avec une probabilité d'extinction p de la population.

3 _____ (20 points)

Un autobus quitte la ville A avec n passagers à bord, et dessert un certain nombre d'arrêts. À chaque arrêt, un passager descend et marche jusqu'à son domicile. Sachant que le temps de marche suit une loi exponentielle de paramètre μ et que la durée du trajet entre deux arrêts est exponentielle de paramètre λ ,

- Déterminer la distribution de l'instant auquel le dernier passager quitte l'autobus.
- Soit t l'instant auquel le dernier passager quitte l'autobus. Quelle est la probabilité que tous les autres passagers aient rejoint leur domicile à ce moment?

4 _____ (10 points)

On considère une file d'attente $M/E_2/1$, c'est-à-dire une file où le temps de service suit une loi d'Erlang de paramètres μ et k ($k = 2$).

Représenter le système à l'aide d'un processus de Markov continu, c'est-à-dire où les durées entre deux transitions sont exponentielles. Bien décrire les états du système ainsi que les taux de transition.

Note: Une variable aléatoire X suit une loi d'Erlang de paramètres μ et k si et seulement si X est la somme de k variables aléatoires exponentielles indépendantes de paramètre μ .

5 _____ (15 points)

Soit la matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} & \frac{7}{8} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Trouver les classes et déterminer les probabilités stationnaires. Ces dernières sont-elles des probabilités limite?

6 _____ (15 points)

Des voyageurs se présentent au guichet automatique d'une compagnie aérienne afin d'obtenir leur carte d'embarquement. Le taux d'arrivée est égal à λ . Le temps nécessaire pour obtenir le document est de 50 (unités de temps) en mode self-service, et de 30 si un employé de la compagnie est présent. Déterminer la longueur moyenne de la file d'attente (à long terme) dans les deux cas, c'est-à-dire avec ou sans employé affecté à l'aide aux usagers.