

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL
DÉPARTEMENT D'INFORMATIQUE ET DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE
EXAMEN FINAL

MÉTHODES DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

Auteur : Patrice MARCOTTE

Date: Vendredi 11 décembre 2009
Heure: 9h30 à 12h30
Salle: Salle AA5941, pavillon André-Aisenstadt

DOCUMENTATION INTERDITE

LA CALCULATRICE EST NON SEULEMENT INTERDITE, MAIS INUTILE

1 _____ (10 points)

Sans résoudre le problème, déterminer si le vecteur $(0, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 0)$ est une solution optimale du programme linéaire

$$\begin{aligned} \max_{x \geq 0} \quad & 7x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 \\ & x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 2x_5 \leq 4 \\ & 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 \leq 3 \\ & 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 2x_4 + 5x_5 \leq 5 \\ & 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 - 2x_5 \leq 1 \quad . \end{aligned}$$

2 _____ (15 points)

Soient $\{X_k\}$ et $\{Y_k\}$ deux chaînes de Markov discrètes et indépendantes définies sur les états 0 et 1. Montrer que le processus stochastique $\{X_k\} + \{Y_k\}$ est également une chaîne de Markov, et déterminer sa matrice de transition de probabilités en fonction des matrices des processus $\{X_k\}$ et $\{Y_k\}$. Répéter l'exercice pour des chaînes de Markov continues.

Let $\{X_k\}$ et $\{Y_k\}$ be two discrete and independent Markov chains defined over the states 0 and 1. Show that the stochastic processes $\{X_k\} + \{Y_k\}$ also defines a Markov chain, and determine its probability transition matrix with respect to the respective matrices associated with $\{X_k\}$ et $\{Y_k\}$. Repeat the exercise for continuous Markov chains.

3 _____ (15 points)

On cherche à maximiser la somme des aires de deux disques inscrits dans un carré, et qui ne se recourent pas.

Minimize the sum of two nonoverlapping disks inscribed within a square.

- Formuler le problème comme un programme non linéaire;
Formulate the problem as a nonlinear program;
- écrire les conditions de Kuhn et Tucker;
Write the KKT conditions;
- ces conditions sont-elles suffisantes pour caractériser un point globalement optimal?
are the KKT conditions sufficient for characterizing a global optimum?
- quelle est la solution optimale du problème (ne pas effectuer de calculs)?
what is the optimal solution of the problem (no calculations required)?

4 _____ (15 points)

Formuler le problème de flot à coût minimum ainsi que son dual. Interpréter les conditions d'optimalité.

Formulate the minimum cost flow problem and its dual. Interpret its optimality conditions.

5 _____ (15 points)

Décrire l'algorithme de Frank-Wolfe pour la résolution de programmes de minimisation non linéaires définis sur des polyèdres.

Describe the Frank-Wolfe algorithm for solving nonlinear minimization programs defined over polyhedra.

- Décrire le fonctionnement de l'algorithme; quel est son taux de convergence?
Show how the algorithm works; what is the convergence rate?
- démontrer que la direction obtenue est bien une direction de descente;
show that the direction is a descent direction;
- quels sont ses avantages et inconvénients?
what are its advantages and drawbacks?
- si l'objectif f est convexe, montrer qu'à l'itération k , on obtient une borne supérieure pour $f(x^k) - f(x^*)$, où x^* est une solution optimale du problème. Je rappelle l'inégalité, valide pour toute fonction convexe différentiable:

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)(y - x),$$

qui devrait vous être utile.

if the objective function f is convex, show that, at iteration k , one gets an upper bound on $f(x^k) - f(x^)$, where x^* is an optimal solution of the problem. I recall the inequality, valid for any differentiable convex function:*

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)(y - x),$$

which might prove useful.

6 _____ (15 points)

Soit $X = \{x^i\}_{i \in I}$ un ensemble de points de R^n . On souhaite créer N sous-groupes suivant les critères suivants:

- **cohérence interne:** les points d'un même groupe doivent être rapprochés;
- **séparation:** les groupes doivent être aussi séparés que possible.

Proposer une formulation mathématique de ce problème, en utilisant au besoin des variables entières.

Let $X = \{x^i\}_{i \in I}$ be a set of points in R^n . One wishes to create N subgroups according to the following criteria:

- **internal consistency:** points of a group should be close to each other;
- **separation:** groups should be as separated as possible.

Propose a mathematical formulation of this problem. If required, you may use integer variables.

7 _____ (15 points)

Résoudre, à l'aide de la technique de branch-and-bound, le programme de sac-à-dos binaire

$$\begin{aligned} \max_x \quad & 17x_1 + 10x_2 + 25x_3 + 17x_4 \\ \text{sujet à} \quad & 5x_1 + 3x_2 + 8x_3 + 7x_4 \leq 12 \\ & x_j \in \{0, 1\}, i = 1, \dots, 4. \end{aligned}$$