

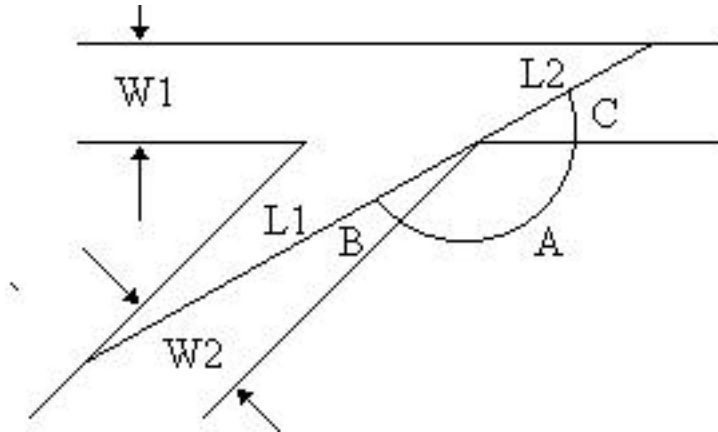
Ift 2421

Chapitre 2

Résolution d'équations non linéaires

Introduction

Description:



$$L_1 = \frac{W_2}{\sin(B)} \quad L_2 = \frac{W_1}{\sin(C)}$$

$$B = \pi - A - C$$

$$\text{avec } L = L_1 + L_2 = \frac{W_2}{\sin(B)} + \frac{W_1}{\sin(C)}$$

L est une fonction de C maximum si

$$\frac{dL}{dC} = \frac{W_2 \cos(B)}{\sin^2(B)} - \frac{W_1 \cos(C)}{\sin(C)}$$

$$\frac{dL}{dC} = \frac{W_2 \cos(\mathbf{p} - A - C)}{\sin^2(\mathbf{p} - A - C)} - \frac{W_1 \cos(C)}{\sin^2(C)}$$

Méthode de résolution de
l'équation scalaire

$$F(X)=0$$

On veut évaluer
numériquement la (ou les)
racines.

$$G(X) = H(X)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$G(X) - H(X) = 0$$

Comment est faite la
fonction?

Quelles sont ses propriétés?

Sur quel intervalle en X
ferons-nous la recherche?

Degré 1:

$$aX+b=0$$

$$X = -b/a$$

Degré 2:

**Solution impossible si le
degré du polynôme est
supérieur à 4.**

Méthode de bisection

(interval-halving method)

Basée sur une alternance de signe
de part et d'autre de la racine cherchée pour
 $F(X) = 0$

Départ:

X_1 et X_2 telles que
 $F(X_1)$ et $F(X_2)$ sont de signes opposés

Itérations:

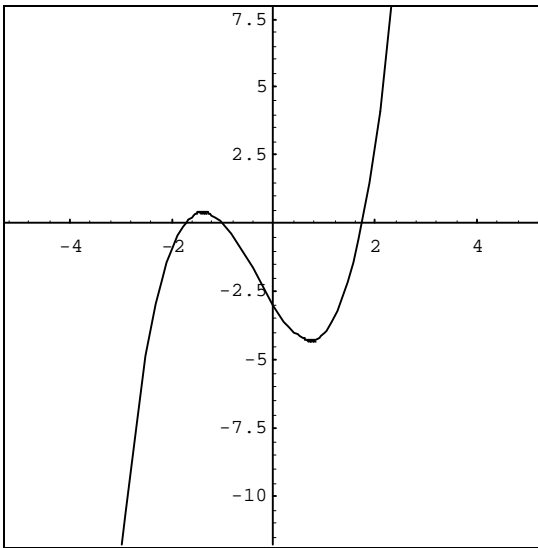
$X_3 = \text{centre de } [X_1, X_2]$

Choisir le bon sous intervalle

Condition suffisante

(de convergence vers une racine):

F est continue sur l'intervalle de recherche $[X_1, X_2]$

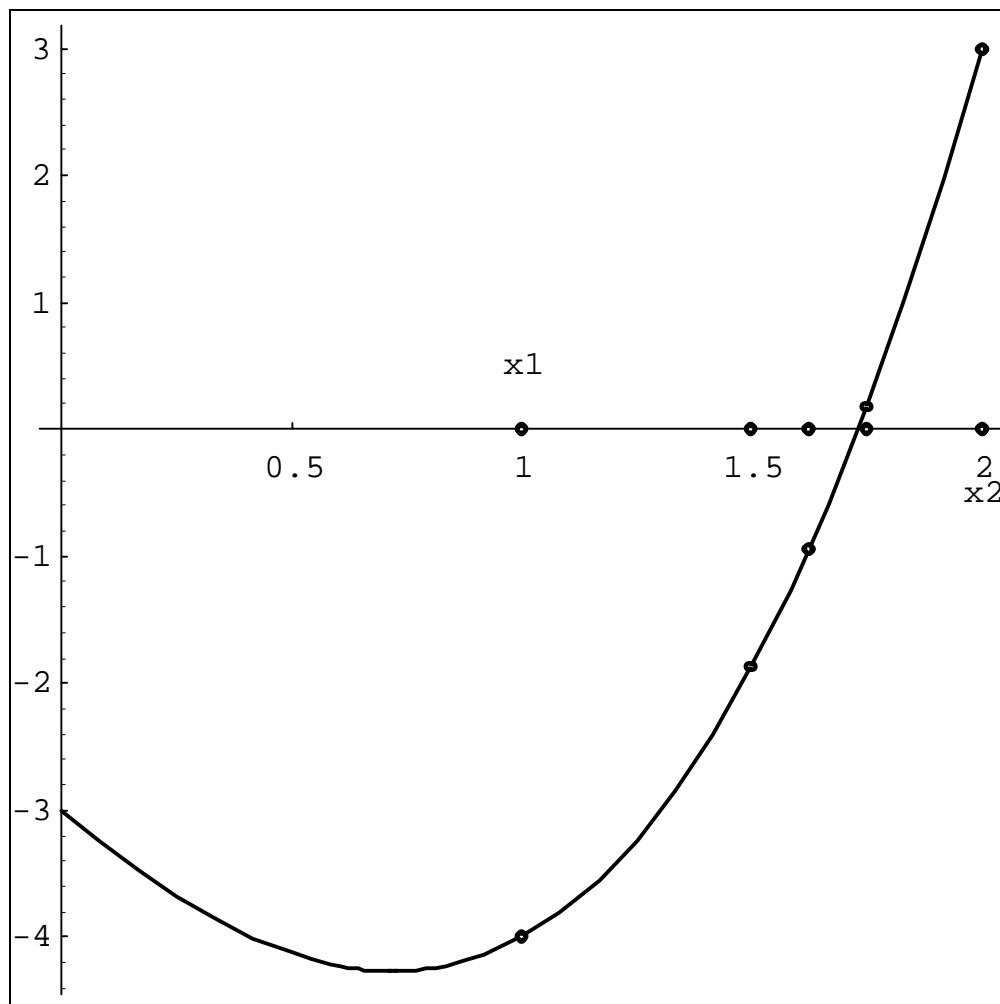


$$F(X) = ((X+1) X - 3) X - 3$$

$$= X^3 + X^2 - 3 X - 3$$

racine : $-1, -\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$.

Méthode de bisection



Algorithme de la méthode de bisection:

Pour déterminer une racine x de $F(X)$, exacte à δ près.

Choisir X_1 et X_2 tels que $F(X_1).F(X_2) \leq 0$
($F(X_1)$ et $F(X_2)$ sont de signes opposés)

Calculer $X_3 = (X_1 + X_2)/2;$

Tant que $\{ |X_1 - X_2| \geq \delta \text{ et } |F(X_3)| \geq \varepsilon \}$ **faire**

Calculer $X_3 = (X_1 + X_2)/2;$

si $\{ F(X_1).F(X_3) \leq 0 \}$ **alors**

 poser $X_2 = X_3;$

sinon

 poser $X_1 = X_3;$

fin si

fin tant

Poser $X = X_3;$

Une itération est définie comme un parcours entier de la séquence d'opérations de la boucle Tant.

L'itéré est alors la valeur résultante obtenue après une itération.

Notons l'itéré d'ordre n par $X_{(n)}$.

Au départ, la racine X se trouve dans l'intervalle de confiance $[X_1, X_2]$

L'erreur sur la racine est alors de $\Delta X = |X_1 - X_2|$

Après chaque itération, on divise l'intervalle en 2 on divise cette erreur par 2. Donc **l'erreur absolue** sur l'itéré d'ordre n est

$$\Delta X_{(n)} = \frac{|X_1 - X_2|}{2^n}$$

Méthode de Bisection

Exemple :

fonction considérée: $-3 + x (-3. + x (1 + x))$ ou $-3 - 3. x + x^2 + x^3$

Estimations initiales:

$$x_1 = 1.$$

$$x_2 = 2.$$

Tolérance sur x: 0.0005

Tolérance sur f(x): 0.00001

Maximum d'itération:100

Itération	x_3	$f(x)$	$ x_{n+1}-x_n $
1	1.5	-1.875	0.5
2	1.75	0.171875	0.25
3	1.625	-0.943359	0.125
4	1.6875	-0.409424	0.0625
5	1.71875	-0.124786	0.03125
6	1.73437	0.0220299	0.015625
7	1.72656	-0.0517554	0.0078125
8	1.73047	-0.0149572	0.00390625
9	1.73242	0.00351267	0.00195312
10	1.73145	-0.0057282	0.000976562
11	1.73193	-0.00110924	0.000488281

Tolérance en X trouvée en 11 itérations.

Méthode d'interpolation linéaire (‘regula falsi’ method)

Basée aussi sur une alternance de signe

Départ:

X_1 et X_2 telles que
 $F(X_1)$ et $F(X_2)$ sont de signes opposés

Itérations:

X_3 est l'intersection avec l'axe des x
de la droite passant par

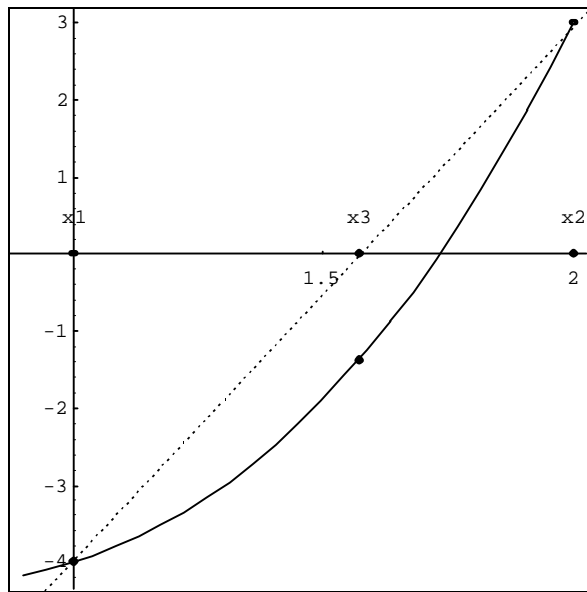
$(X_1, F(X_1))$ et $(X_2, F(X_2))$

choisir le sous intervalle contenant la racine

Condition suffisante

(de convergence vers une racine):

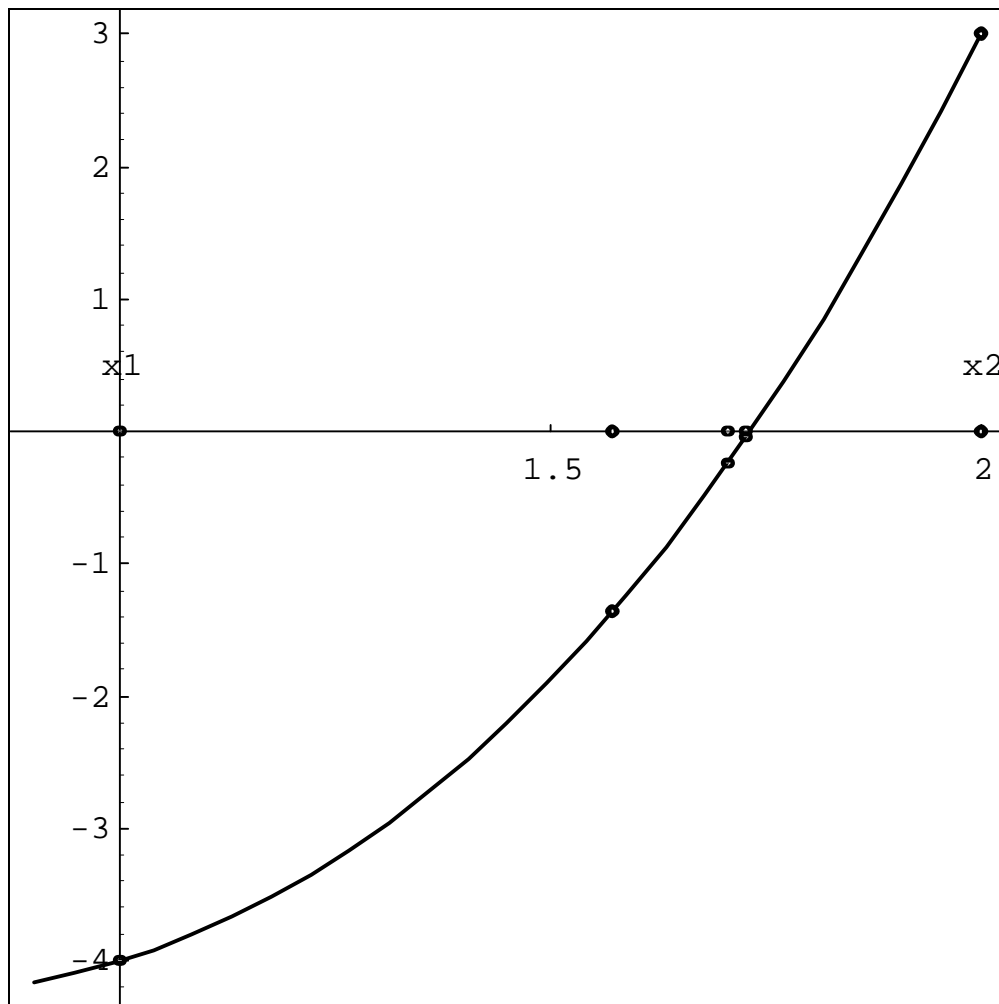
F est continue sur l'intervalle de recherche $[X_1, X_2]$



Droite parallèle
dans un triangle

$$\frac{x_2 - x_3}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_3)}{f(x_2) - f(x_1)}$$

**Méthode
d'interpolation linéaire**



Algorithme de la méthode d'interpolation linéaire:

Pour déterminer une racine x de $F(X)$, exacte à δ près.

Choisir X_1 et X_2 tels que $F(X_1).F(X_2) \leq 0$

($F(X_1)$ et $F(X_2)$ sont de signes opposés)

Calculer $X_3 = X_2 - F(X_2)(X_2 - X_1) / (F(X_2) - F(X_1)) ;$

Tant que $\{ |X_1 - X_2| \geq \delta \text{ et } |F(X_3)| \geq \varepsilon \}$ **faire**

Calculer $X_3 = X_2 - F(X_2)(X_2 - X_1) / (F(X_2) - F(X_1)) ;$

Si $\{ F(X_1).F(X_3) \leq 0 \}$ **alors**

 poser $X_2 = X_3 ;$

Sinon

 poser $X_1 = X_3 ;$

Fin si

Fin tant

Poser $X = X_3 ;$

Mêmes **avantages** que la méthode de bisection:

- Hypothèse faible (continuité) sur F
- Méthode facile à implanter
- Hypothèse de recherche: linéarité

Mêmes **inconvénients** que la méthode de bisection:

- Il faut déterminer un intervalle de départ

- La convergence vers la racine peut être très lente

Méthode d'interpolation linéaire

Exemple :

fonction considérée: $-3 + x (-3. + x (1 + x))$ ou $-3 - 3. x + x^2 + x^3$

Estimations initiales:

$$x_1 = 1.$$

$$x_2 = 2.$$

Tolérance sur x:0.0005

Tolérance sur f(x): $0.00001 = 10^{-5}$

Maximum d'itération:100

Itér	x3	f(x)	$ x_1 - x_2 =$	$ x_1 - x_3 =$	$ x_3 - x_2 $
1	1.571428571	-1.36443	1.	0.5714285714	0.4285714286
2	1.705410822	-0.247745	0.4285714286	0.1339822502	0.2945891784
3	1.727882728	-0.0393396	0.2945891784	$2.24719068 \cdot 10^{-2}$	0.2721172715
4	1.731404866	$-6.11067 \cdot 10^{-3}$	0.2721172715	$3.52213735 \cdot 10^{-3}$	0.2685951342
5	1.731950853	$-9.45921 \cdot 10^{-4}$	0.2685951342	$5.45986904 \cdot 10^{-4}$	0.2680491473
6	1.732035344	$-1.46349 \cdot 10^{-4}$	0.2680491473	$8.44911020 \cdot 10^{-5}$	0.2679646561
7	1.732048415	$-2.26406 \cdot 10^{-5}$	0.2679646561	$1.30714566 \cdot 10^{-5}$	0.2679515847
8	<u>1.732050437</u>	$-3.50252 \cdot 10^{-6}$	0.2679515847	$2.02217663 \cdot 10^{-6}$	0.2679495625

$$x_3 = 1.732050437$$

Tolérance en $f(X)$ trouvée en 8 itérations.

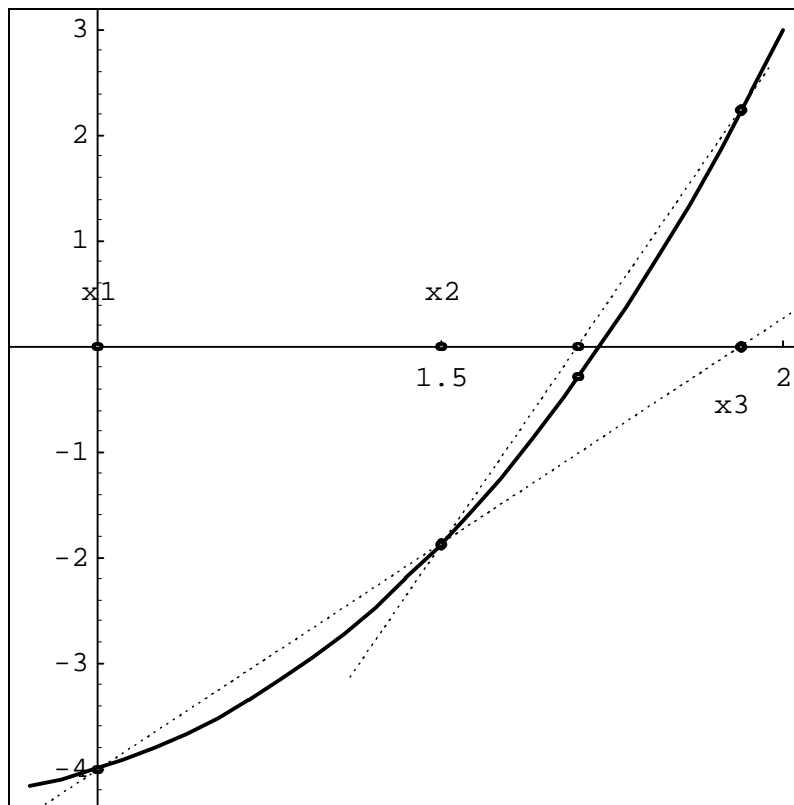
Méthode de la sécante (secant method)

Similaire à l'interpolation linéaire
mais permet l'**extrapolation**.

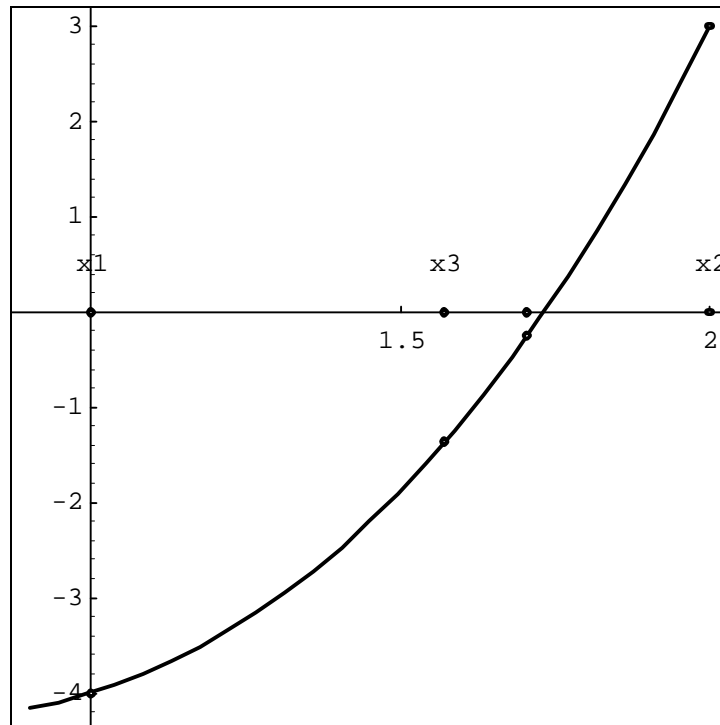
Dans cette méthode, on choisit toujours les
deux valeurs telles que
les $F(X_i)$ sont les plus proches de 0.

Et on a toujours

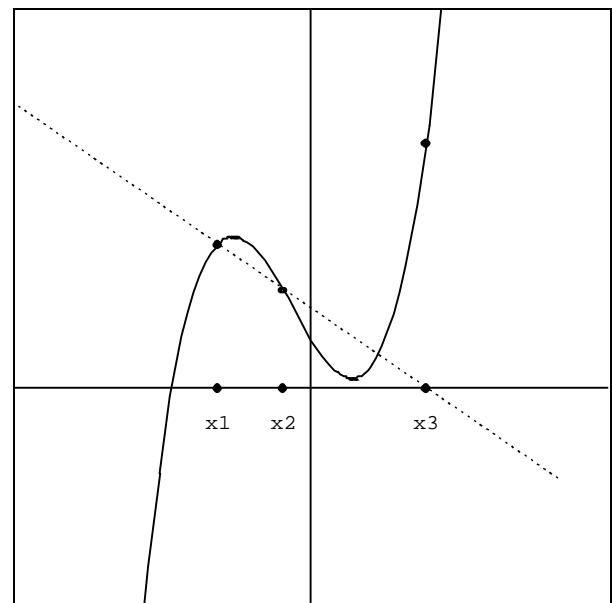
$$X_3 = X_2 - F(X_2) \frac{X_2 - X_1}{F(X_2) - F(X_1)}$$



Exemple :



**Problème
de la
méthode de la sécante**



Méthode de la sécante

Exemple :

fonction considérée: $-3 + x (-3. + x (1 + x))$ ou $-3 - 3. x + x^2 + x^3$

Estimations initiales:

$$x_1 = 1.$$

$$x_2 = 2.$$

Tolérance sur x:0.0005

Tolérance sur f(x):0.00001= 10^{-5}

Maximum d'itération:100

Itér	x_1	x_2	x_3	$f(x_3)$	$ x_1 - x_2 $
1	1.	2.	1.571428571	-1.36443	1.
2	2.	1.571428571	1.705410822	-0.247745	0.4285714286
3	1.571428571	1.705410822	1.735135771	0.0292554	0.1339822502
4	1.705410822	1.735135771	1.731996371	$-5.15177 \cdot 10^{-4}$	0.02972494902
5	1.735135771	1.731996371	<u>1.732050698</u>	$-1.039 \cdot 10^{-6}$	0.003139399878

$$x_3 = 1.732050698$$

Tolérance en f(X) trouvée en 5 itérations.

Remarque importante :

Départ : points quelconques dans le voisinage d'une racine.

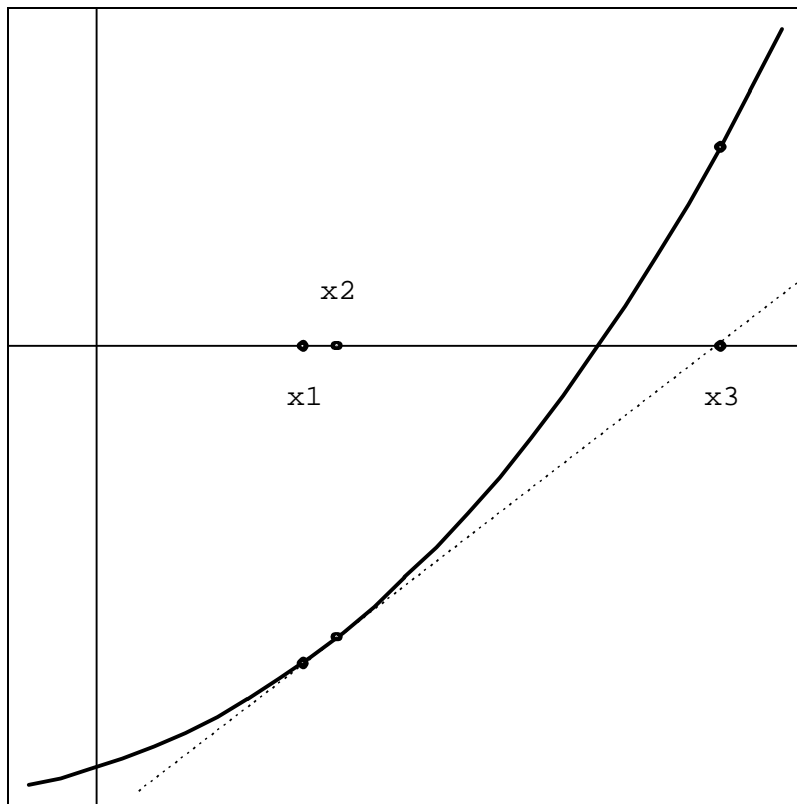
Faire un graphique grossier de la fonction aide parfois beaucoup.

Question ?

Qu'arrive-t-il lorsque

X_1 tend vers X_2 ?

$$X_3 = X_2 - F(X_2) \frac{X_2 - X_1}{F(X_2) - F(X_1)}$$

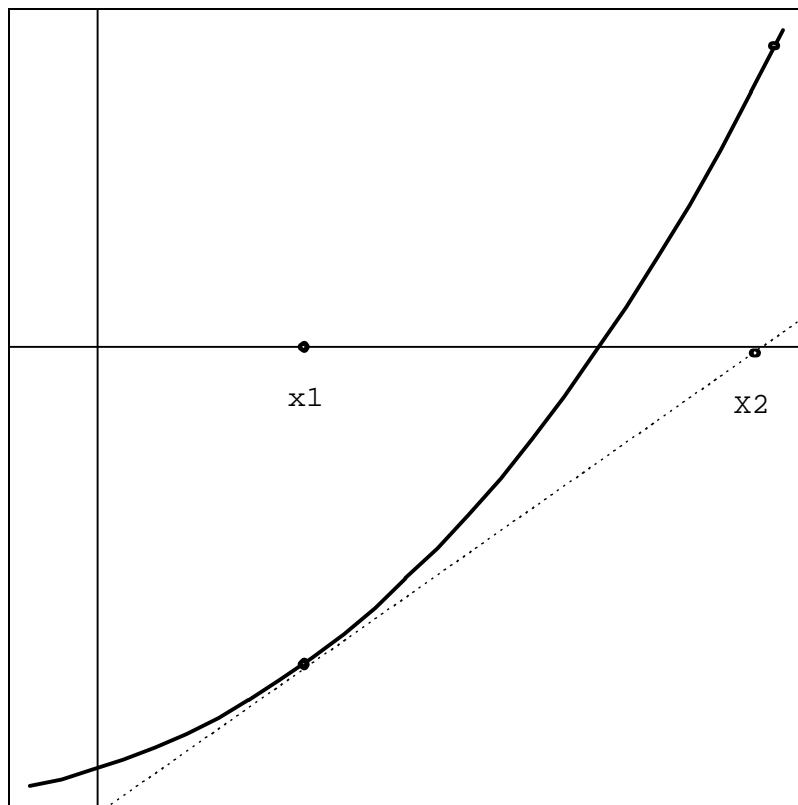


Méthode de Newton (Newton's Method)

Ne demande qu'une seule valeur de départ X_1 .

Mais suppose l'existence de la dérivée de la fonction $F(X)$.

$$\tan(\boldsymbol{q}) = \frac{F(X_1)}{X_2 - X_1}$$



Algorithme de la méthode de Newton

Pour déterminer une racine de $F(X)=0$, exacte à δ près.

Choisir X_1 , une valeur approché de la racine

```
Poser  $X_2 = X_1$  ;  
Calculer  $X_{21} = X_1 - F(X_1)/F'(X_1)$  ;  
  
Tant que {  $|X_1 - X_2| \geq \delta$  et  $|F(X_2)| \geq \varepsilon$  et  $F'(X_1) \neq 0$  }  
faire  
    Poser  $X_2 = X_1$  ;  
    Calculer  $X_1 = X_1 - F(X_1)/F'(X_1)$  ;  
  
    Fin si  
Fin tant  
Poser  $X = X_1$  ;
```

Avantages :

Convergence rapide.
Une seule valeur de départ.

Inconvénients :

F' doit exister.

Evaluer $F(X)$ et $F'(X)$.

Méthode de Newton

Exemple :

fonction considérée: $-3 + x (-3. + x (1 + x))$ ou $-3 - 3. x + x^2 + x^3$

Estimations initiales:

$$x_1 = 2.$$

Tolérance sur x: 0.0005

Tolérance sur f(x): 10^{-5}

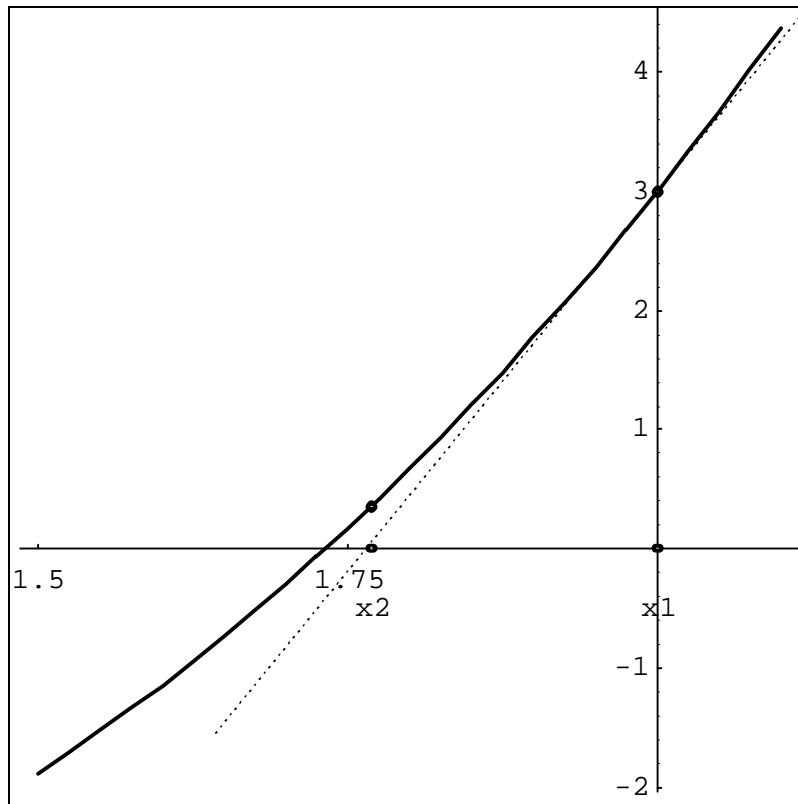
Maximum d'itération: 100

Itération	x1	x2	f(x2)	x1-x2
1	2.	1.769230769	0.360492	0.2307692308
2	1.769230769	1.73292381	0.00826691	0.03630695883
3	1.73292381	<u>1.732051306</u>	4.71824 10^{-6}	0.000872504288

$$x_2 = 1.732051306$$

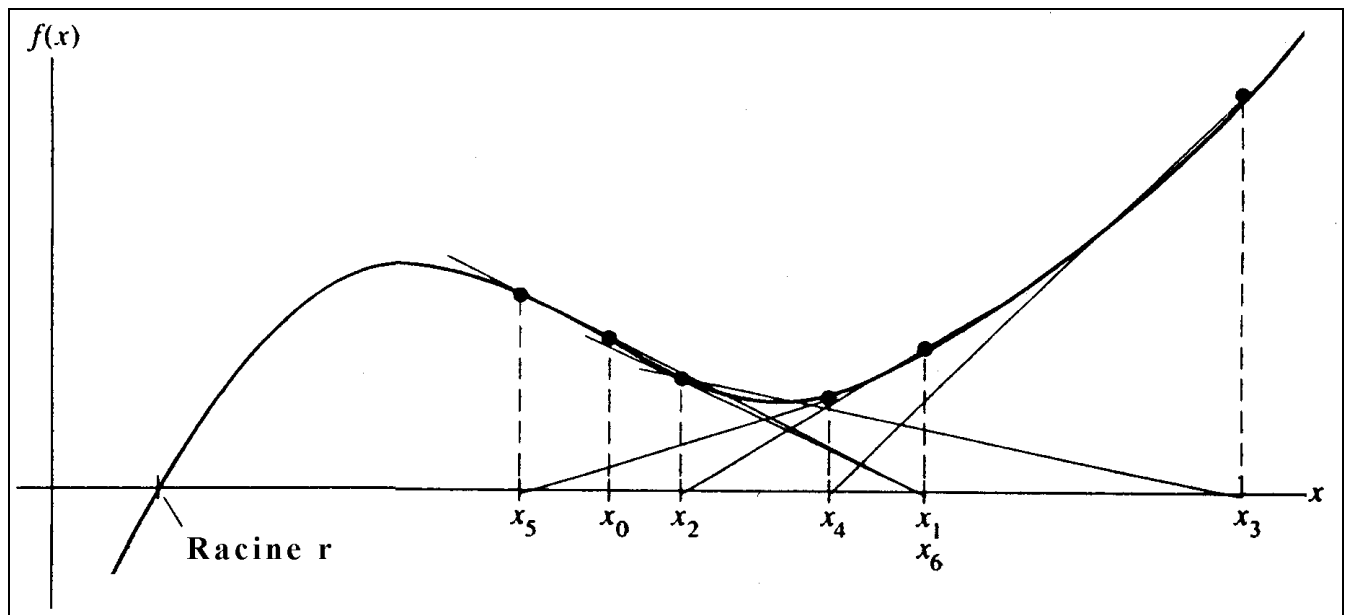
Tolérance en f(X) trouvée en 3 itérations.

Exemple :



Problème de la méthode de Newton

La méthode de Newton est-elle toujours efficace ?



Développement formel de la méthode de Newton

Connaissant une approximation

$$X_n \approx r$$

pour la racine telle que $F(X_n) \neq 0$,

cherchons à corriger

$$X_{n+1} = X_n + \delta$$

pour avoir $F(X_{n+1}) = 0$

$$F(X_{n+1}) = F(X_n + \delta)$$

$$\approx F(X_n) + \delta F'(X_n)$$

donc

$$\delta = - F(X_n) / F'(X_n)$$

ce qui est la méthode de Newton

$$X_{n+1} = X_n - \frac{F(X_n)}{F'(X_n)}$$

Remarques :

- Si on a convergence

$$X_{n+1} = X_n$$

on déduit de l'algorithme que

$$X = X - \frac{F(X)}{F'(X)}$$

donc $F(X) = 0 \Rightarrow X = r$

- Le développement de l'algorithme de Newton est de la forme :

$$X_{n+1} = G(X_n)$$

avec

$$G(X) = X - \frac{F(X)}{F'(X)}$$

racine lorsque $X = G(X)$

Méthode du point fixe

($x = g(x)$ méthode)

Réarrangement de $f(x) = 0$
pour une forme
 $x = g(x)$

Un point fixe $x = r$ est solution de $x = g(x)$
alors
 $x = r$ est solution de
 $f(x) = 0$

Méthode des itérations :
 $x_{n+1} = g(x_n)$

Algorithme de la méthode du point fixe

Choisir un réarrangement de $f(x) = 0$ de la forme $x = g(x)$,

Poser $X_2 = X_1$;

Répéter

Poser $X_1 = X_2$;

Calculer $X_2 = g(X_1)$;

Tant que $\{ |X_1 - X_2| \geq \delta \}$

Poser $X = X_1$;

Exemple :

$$f(x) = x^2 - 2x - 3 = 0$$

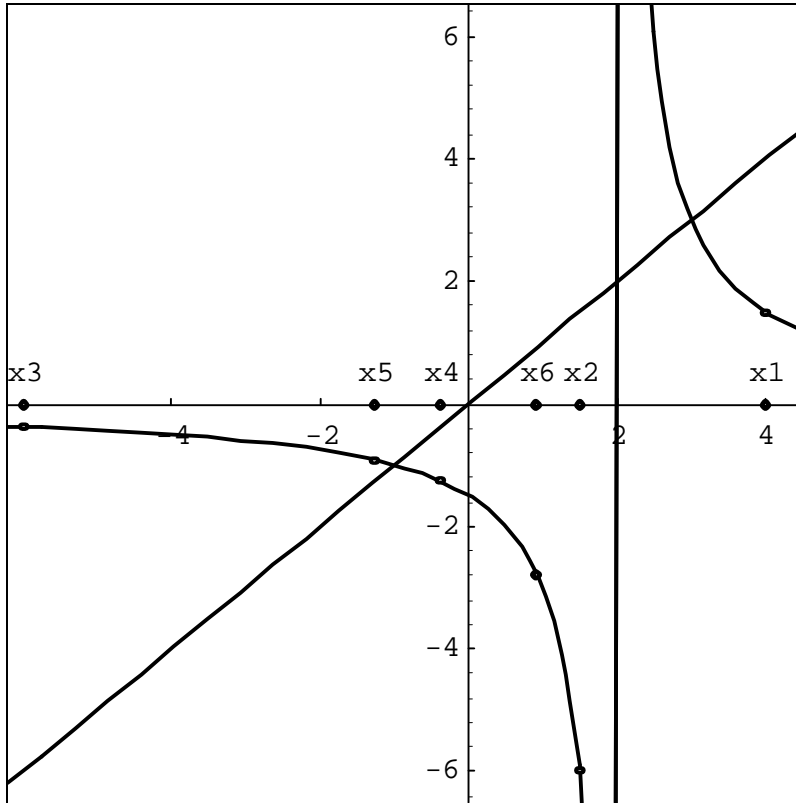
deux racines : $r_1 = -1$ et $r_2 = 3$

valeur de départ : $x_1 = 4$

Différentes formes $x = g(x)$
à partir de $f(x)=0$

- $g(x) = \frac{3}{x-2}$

Graphiquement :



$$\begin{aligned} x &= g(x) \\ \Leftrightarrow \\ \begin{cases} y &= g(x) \\ y &= x \end{cases} \end{aligned}$$

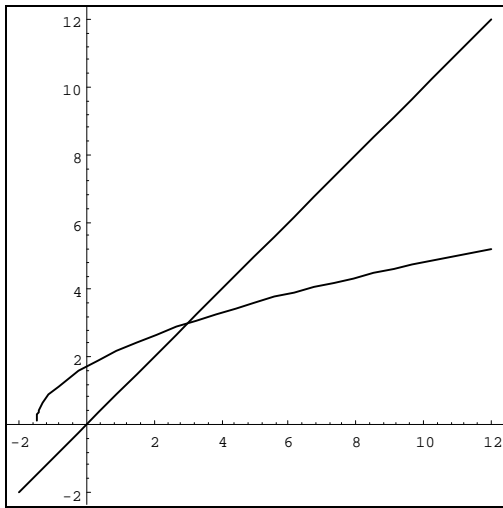
Estimations initiales: $x_1 = 4$.

Tolérance sur x : 0.0005 et Maximum d'itération: 100

Itération	x_1	x_2	$ x_1 - x_2 $
1	4.	1.5	2.5
2	1.5	-6.	7.5
3	-6.	-0.375	5.625
4	-0.375	-1.26316	0.888158
5	-1.26316	-0.919355	0.343803
6	-0.919355	-1.02762	0.108269
7	-1.02762	-0.990876	0.0367484
8	-0.990876	-1.00305	0.0121747
9	-1.00305	-0.998984	0.00406649
10	-0.998984	-1.00034	0.00135458
11	-1.00034	-0.999887	0.00045162

$x_{12} = -0.9998871026$ Converge vers $r = -1$

- $g(x) = \sqrt{2x+3}$



$$x_1 = 4.$$

$$x_2 = 3.31662$$

$$x_3 = 3.10375$$

$$x_4 = 3.03439$$

$$x_5 = 3.01144$$

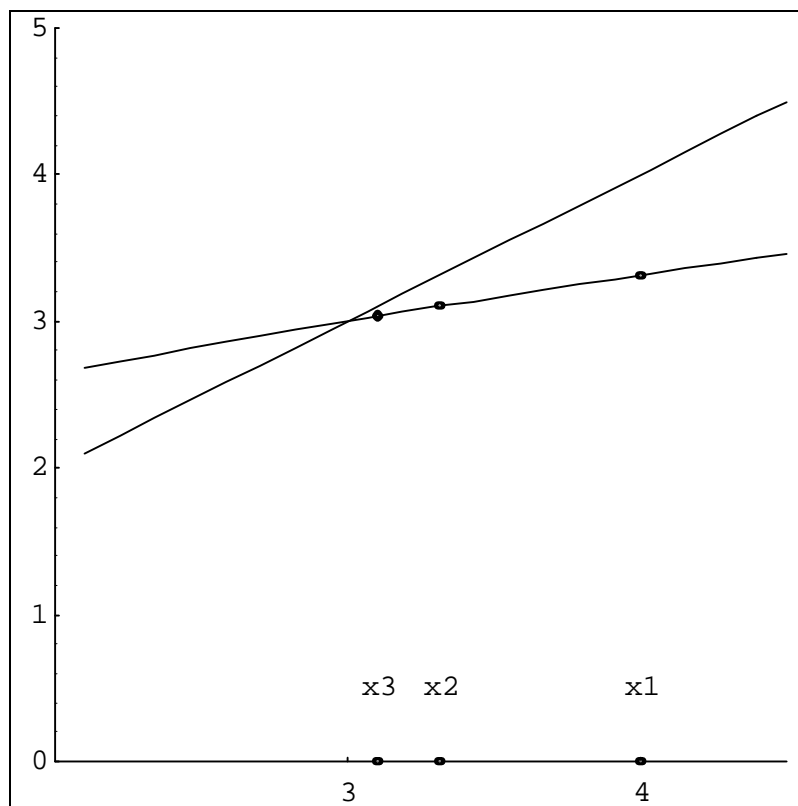
$$x_6 = 3.00381$$

$$x_7 = 3.00127$$

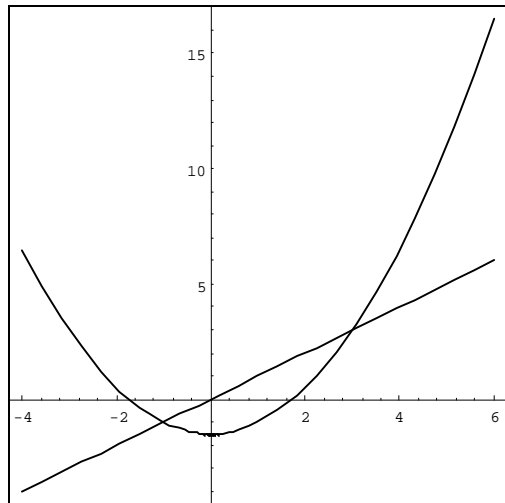
$$x_8 = 3.00042$$

$$x_9 = 3.00014$$

Converge vers $r = 3$



- $g(x) = \frac{x^2 - 3}{2}$



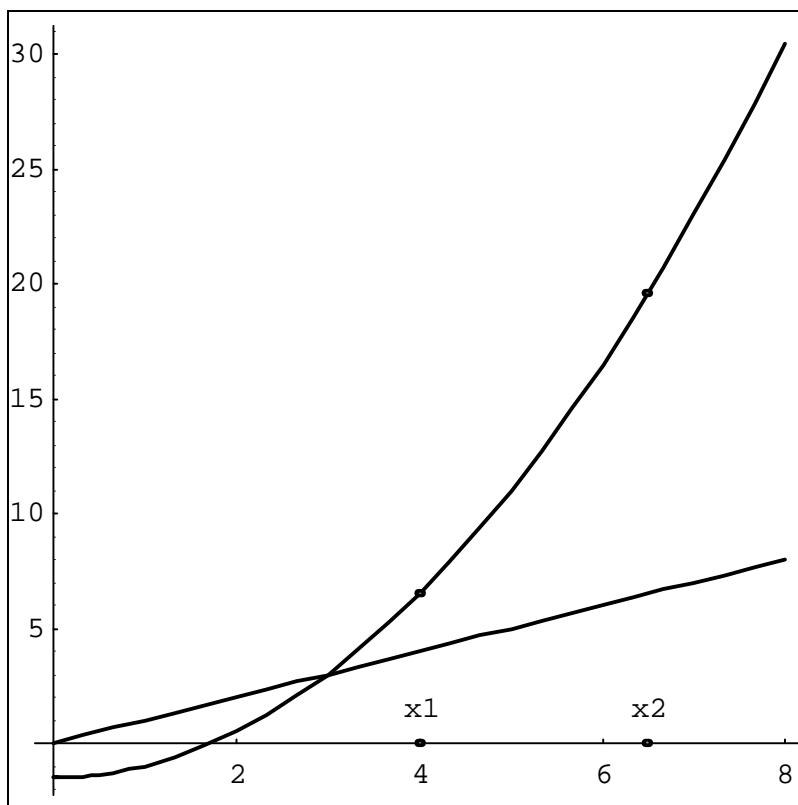
$$x_1 = 4.$$

$$x_2 = 6.5$$

$$x_3 = 19.635$$

$$x_4 = 191.267$$

Diverge



Que se passe-t-il si $x_1 = 0$?

Analyse d'erreurs pour les méthodes itératives

définition:

Caractéristiques de convergence

Supposons que $\{x_n\}$ converge vers x^*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$$

et que $e_n = x_n - x^*$ pour tout $n \geq 0$.

S'il existe 2 constantes positives C et p telles que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_{n+1} - x^*|}{|x_n - x^*|^p} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^p} = C \quad \Rightarrow \quad e_{n+1} \approx C(e_n)^p$$

on dit alors que la convergence de $\{x_n\}$ est d'**ordre p** avec une **constante asymptotique $C < 1$** .

Remarques :

- Si $p = 1$, convergence linéaire.
Si $p = 2$, convergence quadratique.
- Méthode :
On essaie avec $p = 1$ de trouver C .
Si on obtient un $C \neq 0$, convergence linéaire
sinon on essaie avec $p = 2$.
- On définit souvent l'erreur signée par
$$e_n = x_n - x^*$$

- La constante asymptotique C affecte la vitesse de convergence, mais d'une façon moins importante que l'ordre de convergence.

Exemple :

$$\text{Supposons que } y_{n+1} = \frac{y_n}{2} + 1$$

si convergence

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 2$$

On essaie avec $p=1$ de trouver C .

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|y_{n+1} - 2|}{|y_n - 2|^p} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left| \left(\frac{y_n}{2} + 1 \right) - 2 \right|}{|y_n - 2|} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

donc $p=1$ et $C = 0.5$

convergence linéaire

Caractéristiques de convergence

Méthode de bisection

L'intervalle de confiance pour la méthode de bisection rapetisse selon :

$$\Delta X_n = \frac{|X_1 - X_2|}{2^n}$$

L'erreur à l'itération n est bornée par

$$|e_n| = \Delta X_n$$

SI on pose $p = 1$, on obtient :

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^p} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{|X_1 - X_2|}{2^{n+1}}}{\frac{|X_1 - X_2|}{2^n}} = \frac{1}{2}$$

Donc la méthode de bisection a une convergence linéaire ($p=1$) avec une constante asymptotique $C = 1/2$.

Caractéristiques de convergence Méthode d'interpolation linéaire

Pour la Méthode d'interpolation linéaire, on a aussi une convergence linéaire ($p = 1$) $C < 1$.
avec une constante asymptotique

$$C = \frac{1}{2} \left| X_2 - X^* \right| \left| \frac{f''(X^*)}{f'(X^*)} \right|$$

(X_1, X_2) un voisinage de X^* .

- $\frac{1}{2} < C < 1$ Convergence plus lente que pour la bisection.
- $C < \frac{1}{2}$ Convergence plus rapide que pour la bisection.

Caractéristiques de convergence Méthode de la sécante

Pour la méthode de la sécante, on a une convergence d'ordre non entier avec :

$$p = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1.618...$$

(Nombre d'or)

Caractéristiques de convergence

Méthode du point fixe

Pour la méthode du point fixe, on a :

$$X_{n+1} = g(X_n) \text{ et } r = g(r)$$

Par le théorème de la moyenne (Livre de référence page A2-A3),
on montre que si $|g'(r)| \neq 0$:

$$\begin{aligned} X_{n+1} - r &= g(X_n) - g(r) \\ &= \frac{g(X_n) - g(r)}{X_n - r} (X_n - r) \\ &= g'(\mathbf{x}_n)(X_n - r) \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$|e_{n+1}| = g'(\mathbf{x}_n)|e_n|$$

Donc la convergence sera linéaire et

$$\begin{aligned} C &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^p} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} |g'(\mathbf{x}_n)| \\ &= |g'(r)| \end{aligned}$$

Note :

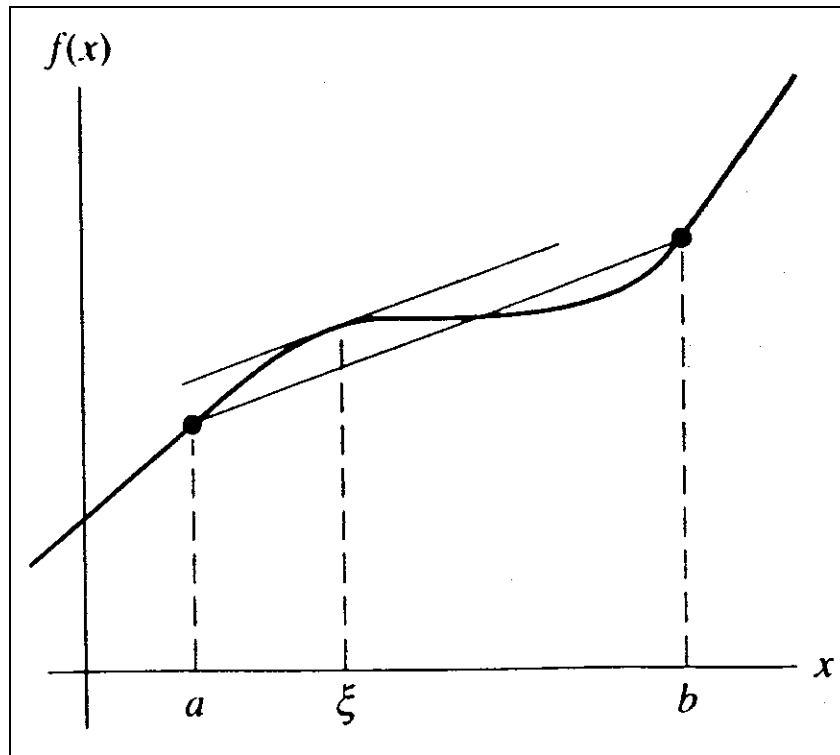
La condition
 $0 < C < 1$

est **nécessaire** pour avoir une
convergence linéaire

Ici, il faut que :

$$|g'(r)| < 1 \text{ et } |g'(r)| \neq 0$$

Théorème de la moyenne



Théorème de la moyenne pour la dérivée

Si $f(x)$ est continue sur $[a, b]$

alors il existe ξ tel que $a \leq \xi \leq b$
et

$$f'(\mathbf{x}) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Théorème de la moyenne appliqué à une intégrale

Si $f(x)$ est continue et
intégrable sur $[a, b]$

alors il existe ξ tel que $a \leq \xi \leq b$
et

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a) f(\mathbf{x})$$

voir page A-2 et A-3 livre référence

Caractéristiques de convergence

Méthode du point fixe (autre démonstration)

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = g(x)$$

$$x_{n+1} = g(x_n) \qquad e_n = x_n - r \qquad e_{n+1} = x_{n+1} - r$$

$$= g(r + e_n)$$

$$= \underbrace{g(r)} + \frac{g'(r)}{1!} e_n + \frac{g''(r)}{2!} e_n^2 + \frac{g'''(r)}{3!} e_n^3 + \dots \quad (Taylor)$$

$$e_{n+1} = x_{n+1} - r = \frac{g'(r)}{1!} e_n + \frac{g''(r)}{2!} e_n^2 + \frac{g'''(r)}{3!} e_n^3 + \dots$$

- si $g'(r) \neq 0$ $\frac{e_{n+1}}{e_n} = g'(r) + \frac{g''(r)}{2!} e_n + \frac{g'''(r)}{3!} e_n^2 + \dots$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|} = |g'(r)| \neq 0 \Rightarrow \text{convergence linéaire}$$

note : $|g'(r)| < 1$

- si $g'(r) = 0$ et $g''(r) \neq 0$

$$\frac{e_{n+1}}{e_n^2} = \frac{g''(r)}{2!} + \frac{g'''(r)}{3!} e_n + \dots$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^2} = \frac{|g''(r)|}{2} \neq 0 \Rightarrow \text{convergence quadratique}$$

- si $g'(r) = g''(r) = 0$ et $g'''(r) \neq 0$

$$\frac{e_{n+1}}{e_n^3} = \frac{g'''(r)}{3!} + \frac{g^{(iv)}(r)}{4!} e_n + \dots$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^3} = \frac{|g'''(r)|}{3!} \neq 0 \Rightarrow \text{convergence cubique}$$

Remarque :

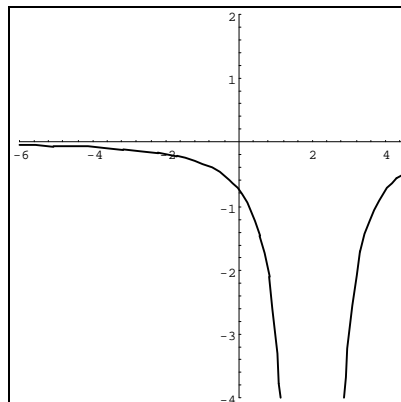
Une condition suffisante de convergence de la suite des approximations est que la valeur absolue de la pente de F soit inférieure à 1 dans un voisinage de la racine r, et que x_0 le point de départ soit dans ce voisinage.

Notes :

- $g(x) = \frac{3}{x-2}$

$$g'(x) = \left| \frac{-3}{(x-2)^2} \right| < 1$$

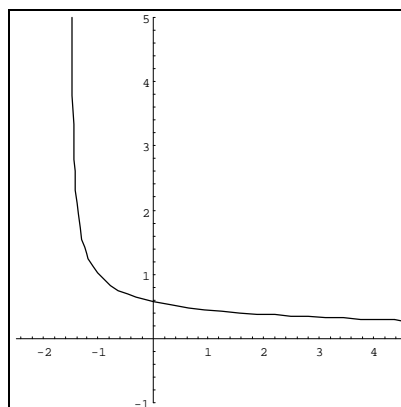
Toujours



- $g(x) = \sqrt{2x+3}$

$$g'(x) = \left| \frac{1}{\sqrt{2x+3}} \right| < 1$$

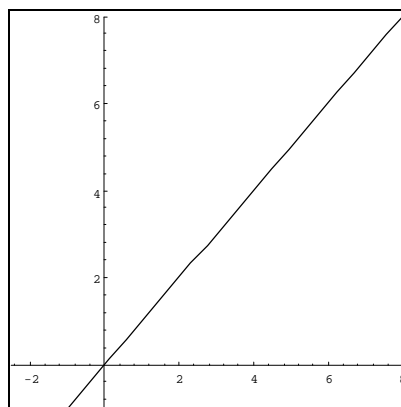
sur l'intervalle de convergence



- $g(x) = \frac{x^2 - 3}{2}$

$$g'(x) = |x| > 1$$

sur l'intervalle
I =]-∞, -1[∪]1, +∞[



Caractéristiques de convergence Méthode de Newton

La méthode de Newton est une méthode de point fixe avec

$$G(X) = X - \frac{F(X)}{F'(X)}$$

En se servant du résultat précédent, on calcule $G'(r)$

$$G'(r) = 1 - \frac{F'(r)F'(r) - F(r)F''(r)}{(F'(r))^2} = \frac{F(r)F''(r)}{(F'(r))^2}$$

Mais $F(r) = 0$

Si la racine est **simple** en $X = r$,
on aura $G'(r) = 0$

On va donc développer $G(X)$ au second ordre en $X = r$

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= G(X_n) = G(r + e_n) \\ &= G(r) + G'(r)e_n + \frac{1}{2}G''(\mathbf{x}_n)e_n^2 \\ &= r + 0 \cdot e_n + \frac{1}{2}G''(\mathbf{x}_n)e_n^2 \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{2}G''(\mathbf{x}_n) \right| = \left| \frac{1}{2}G''(r) \right|$$

\Rightarrow convergence quadratique ($p=2$).

Multiplicité d'une racine

Définition :

L'ordre (ou la multiplicité)
d'une racine en $X = r$
est le plus petit entier m pour
lequel on ait

$$F(X) = (X - r)^m H(X)$$

avec $H(r) \neq 0$

Exemple :

$$F(X) = (X - 3)^3$$

$$F(r) = 0$$

$$F'(r) = 3 (X - 3)^2 = 0$$

Remarques :

1. Si $m = 1$, on dit que r est une racine simple.
2. Si $m \geq 2$, on dit que r est une racine multiple.

Pour la méthode de Newton, dans le cas de racines multiples, on
a une dérivée première

$$F'(X) = (X-r)^{m-1} \{m H(X) + (x - r) H'(X)\}$$

et une dérivée seconde

$$F''(X) = (X-r)^{m-2} \{m(m-1) H(X) + 2m(X-r) H'(X) + (X-r)^2 H''(X)\}$$

donc

$$G'(X) = \frac{F(X)F''(X)}{(F'(X))^2}$$

$$= \frac{H(X)\{m(m-1)H(X) + 2m(X-r)H'(X) + (x-r)^2 H''(x)\}}{(mH(X) + (X-r)H'(X))^2}$$

$$\text{donc } |G'(r)| = (m - 1)/m$$

La convergence est linéaire avec $C = (m - 1)/m$.

Remarques :

1. Pour la convergence linéaire, à chaque itération (à la limite), on gagne un nombre constant de CSE.

2. Pour la convergence quadratique, à chaque itération (à la limite), on gagne le double du **nombre** de CSE gagnés à l'itération précédente.

$$X_n = \underline{1.23456789}$$

$$\Delta X_n \leq 0.005$$

Convergence quadratique

$$\Delta X_{n+1} = C (\Delta X_n)^2 = 0.000025$$

$$\Delta X_{n+1} \leq 0.00005$$

$$X_{n+1} = \underline{1.23456789}$$

$$\Delta X_{n+2} = C (\Delta X_{n+1})^2 \leq 2.5 \cdot 10^{-9}$$

$$\Delta X_{n+1} \leq 0.5 \cdot 10^{-8}$$

$$X_{n+2} = \underline{1.23456789}$$

Résumé :

1. Bissection et interpolation linéaire :

Convergence linéaire avec $p = 1$

2. Sécante :

Convergence avec $p = 1.62$

3. Newton :

Racine simple : Convergence quadratique $p = 2$

Racine multiple : Convergence linéaire : $p = 1$

4. Point fixe :

$p = 1$, Convergence linéaire.

$g'(x) = 0$, Convergence quadratique $p = 2$

$g''(x) = 0$, Convergence cubique $p = 3$

Critères de convergence

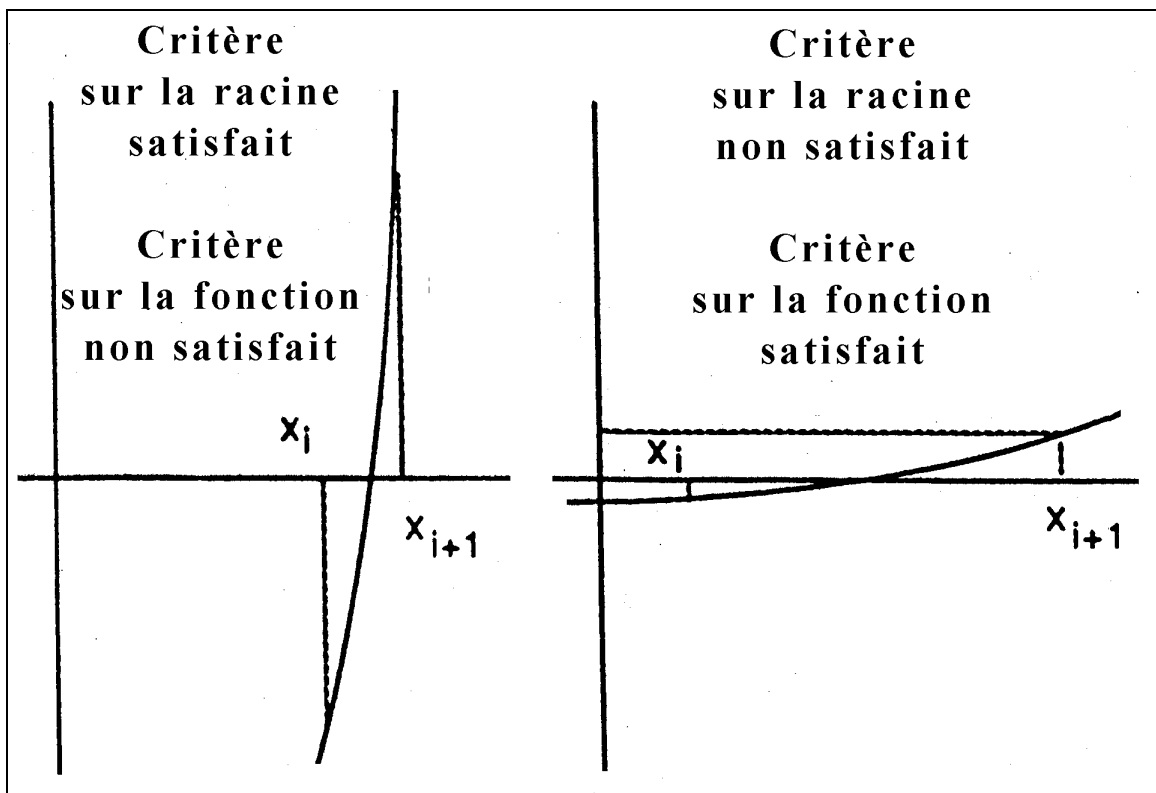
1. On converge parce que deux valeurs successives sont assez rapprochées.

$$|X_{i+1} - X_i| < \text{Tolérance sur la racine}$$

2. On converge parce que la fonction en un point est suffisamment proche de 0.

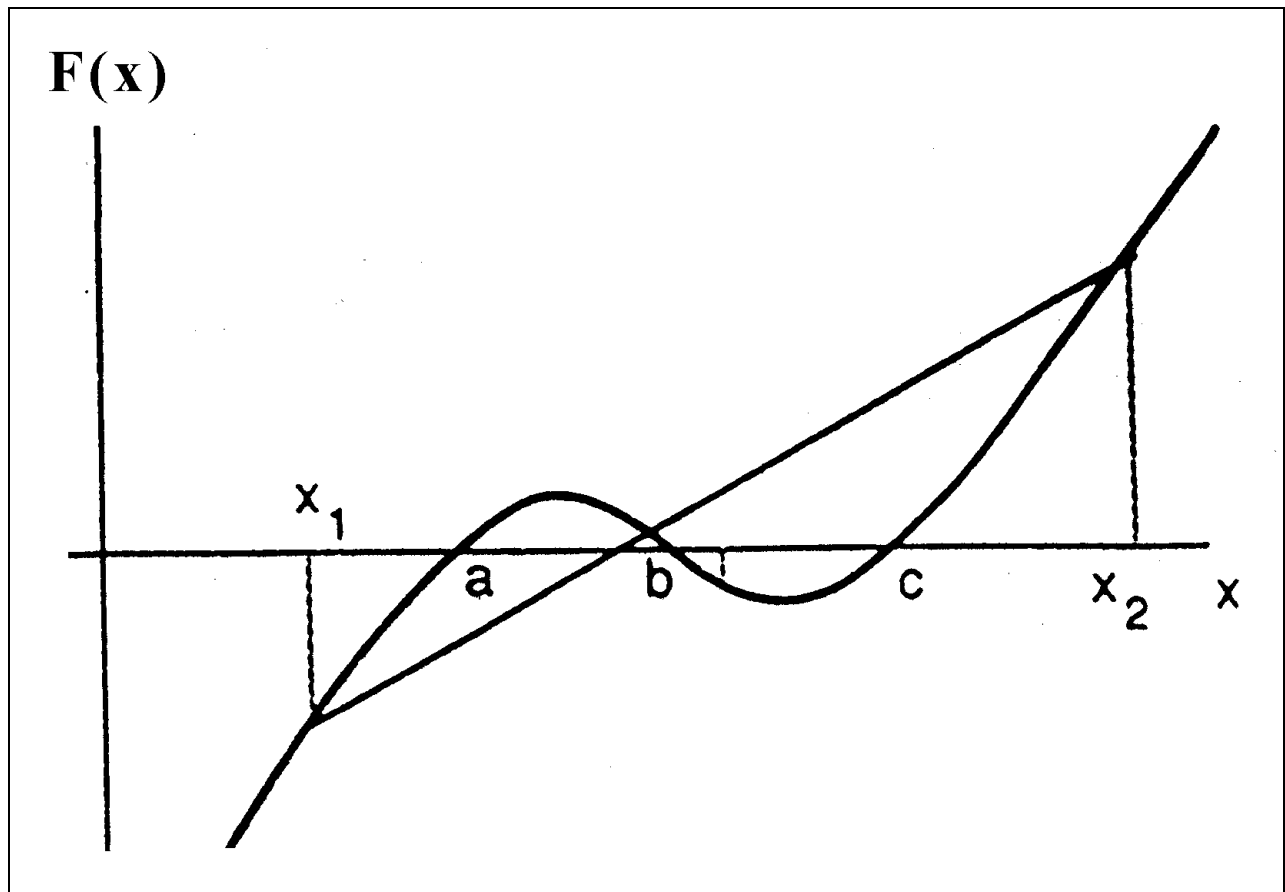
$$|F(X_{i+1})| < \text{Tolérance sur la fonction}$$

3. Il arrive de combiner les deux conditions.

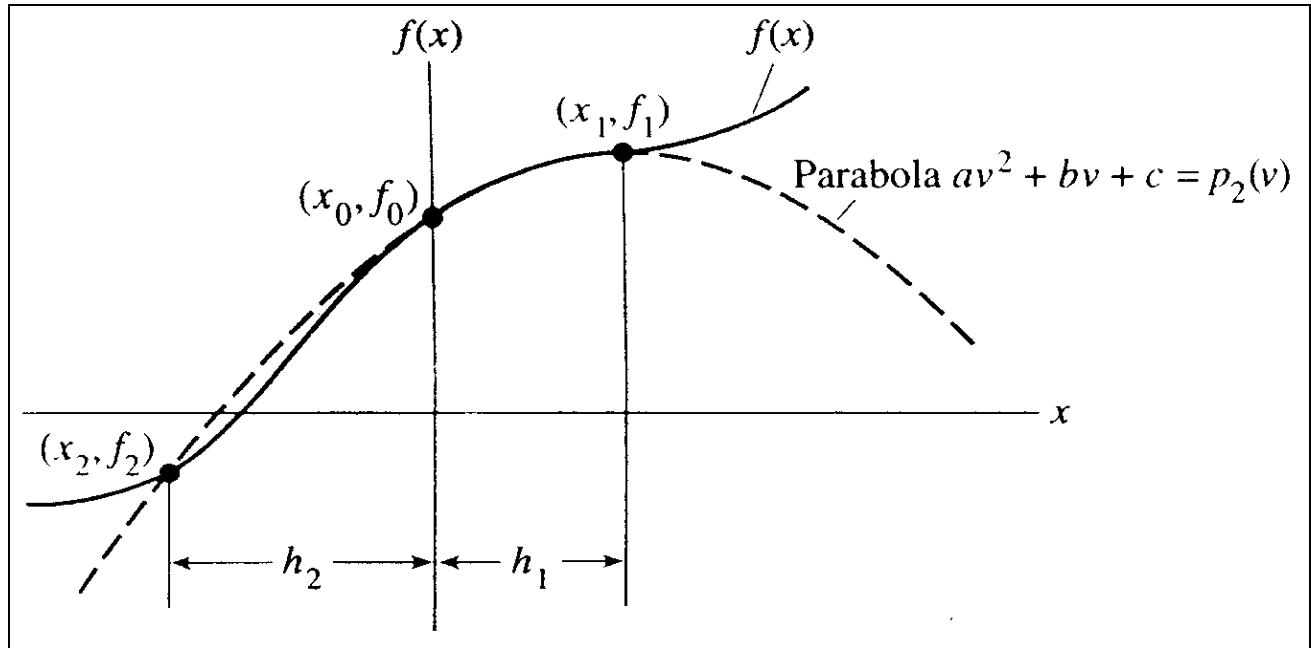


Il y a ici 3 racines $\{a, b, c\}$
Où converge-t-on ?

Bissection ?
Interpolation Linéaire ?
Sécante ?
Newton ?



Méthode de Muller



Parabole : $a (X - X_0)^2 + b (X - X_0) + C = P(X) = 0$

On trouve a, b et c à partir du système d'équation :

$$\begin{cases} P(X_0) = f(X_0) \\ P(X_1) = f(X_1) \\ P(X_2) = f(X_2) \end{cases}$$

Puis les racines de la parabole :

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + X_0$$

On choisit enfin le nouveau X_3 (le plus près de X_0) et on reprend les itérations.