

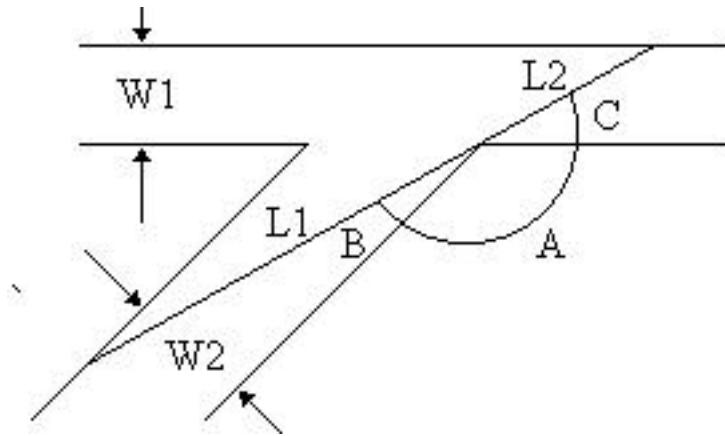
**Ift 2421**

## **Chapitre 2**

**Résolution d'équations  
non linéaires**

# Introduction

## Description:



$$L_1 = \frac{W_2}{\sin(B)} \quad L_2 = \frac{W_1}{\sin(C)}$$

$$B = \pi - A - C$$

$$\text{avec } L = L_1 + L_2 = \frac{W_2}{\sin(B)} + \frac{W_1}{\sin(C)}$$

$L$  est une fonction de  $C$  maximum si

$$\frac{dL}{dC} = \frac{W_2 \cos(B)}{\sin^2(B)} - \frac{W_1 \cos(C)}{\sin^2(C)}$$

$$\frac{dL}{dC} = \frac{W_2 \cos(p - A - C)}{\sin^2(p - A - C)} - \frac{W_1 \cos(C)}{\sin^2(C)}$$

Méthode de résolution de l'équation scalaire

$$F(X)=0$$

On veut évaluer numériquement la (ou les) racines.

$$\begin{aligned} G(X) &= H(X) \\ \Leftrightarrow \\ G(X) - H(X) &= 0 \end{aligned}$$

Comment est faite la fonction?

Quelles sont ses propriétés?

Sur quel intervalle en X ferons-nous la recherche?

Degré 1:

$$\begin{aligned} aX+b &= 0 \\ X &= -b/a \end{aligned}$$

Degré 2:

**Solution impossible si le degré du polynôme est supérieur à 4.**

## **Méthode de bisection** (interval-halving method)

Basée sur une alternance de signe  
de part et d'autre de la racine cherchée pour  
 $F(X) = 0$

### **Départ:**

$X_1$  et  $X_2$  telles que  
 $F(X_1)$  et  $F(X_2)$  sont de signes opposés

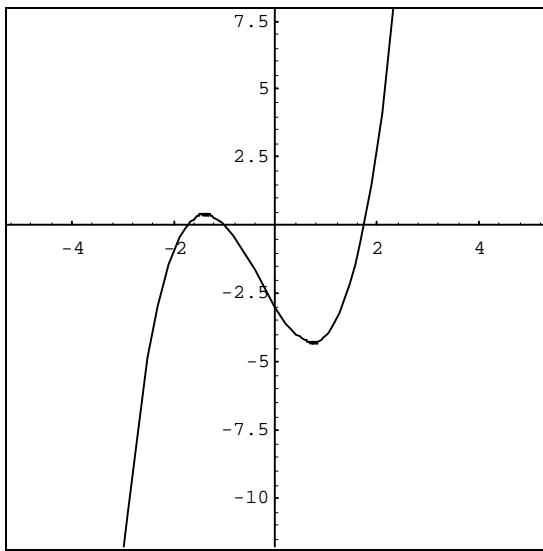
### **Itérations:**

$X_3$  = centre de [  $X_1, X_2$  ]

Choisir le bon sous intervalle

**Condition suffisante**  
(de convergence vers une racine):

$F$  est continue sur l'intervalle de recherche [  $X_1, X_2$  ]

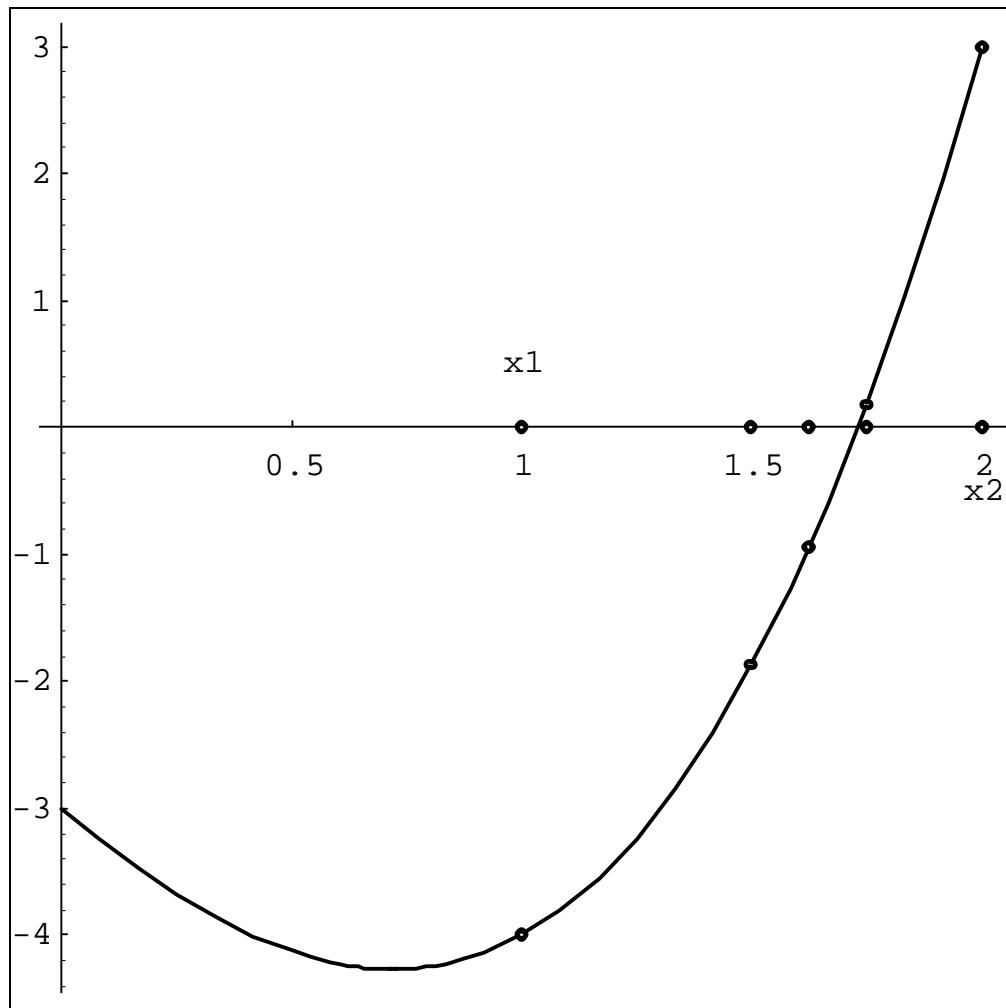


$$F(X) = ((X+1) X - 3) X - 3$$

$$= X^3 + X^2 - 3X - 3$$

racine :  $-1, -\sqrt{3}$  et  $\sqrt{3}$ .

## Méthode de bisection



## Algorithme de la méthode de bissection:

Pour déterminer une racine  $x$  de  $F(X)$ , exacte à  $\delta$  près.

Choisir  $X_1$  et  $X_2$  tels que  $F(X_1).F(X_2) \leq 0$

( $F(X_1)$  et  $F(X_2)$  sont de signes opposés)

**Calculer**  $X_3 = (X_1 + X_2) / 2$ ;

**Tant que** {  $|X_1 - X_2| \geq \delta$  et  $|F(X_3)| \geq \varepsilon$  } **faire**

**Calculer**  $X_3 = (X_1 + X_2) / 2$ ;

**Si** {  $F(X_1).F(X_3) \leq 0$  } **alors**

    poser  $X_2 = X_3$ ;

**Sinon**

    poser  $X_1 = X_3$ ;

**Fin si**

**Fin tant**

Poser  $X = X_3$ ;

Une itération est définie comme un parcours entier de la séquence d'opérations de la boucle Tant.

L'itéré est alors la valeur résultante obtenue après une itération.

Notons l'itéré d'ordre  $n$  par  $X_{(n)}$ .

Au départ, la racine  $X$  se trouve dans l'intervalle de confiance  $[X_1, X_2]$   
L'erreur sur la racine est alors de  $\Delta X = |X_1 - X_2|$

Après chaque itération, on divise l'intervalle en 2 on divise cette erreur par 2. Donc **l'erreur absolue** sur l'itéré d'ordre  $n$  est

$$\Delta X_{(n)} = \frac{|X_1 - X_2|}{2^n}$$

## Méthode de Bissection

Exemple :

fonction considérée:  $-3 + x (-3. + x (1 + x))$  ou  $-3 - 3. x + x^2 + x^3$

Estimations initiales:

$$x_1 = 1.$$

$$x_2 = 2.$$

Tolérance sur x: 0.0005

Tolérance sur  $f(x)$ : 0.00001

Maximum d'itération: 100

Itération	$x_3$	$f(x)$	$ x_{n+1}-x_n $
1	1.5	-1.875	0.5
2	1.75	0.171875	0.25
3	1.625	-0.943359	0.125
4	1.6875	-0.409424	0.0625
5	1.71875	-0.124786	0.03125
6	1.73437	0.0220299	0.015625
7	1.72656	-0.0517554	0.0078125
8	1.73047	-0.0149572	0.00390625
9	1.73242	0.00351267	0.00195312
10	1.73145	-0.0057282	0.000976562
11	<b>1.73193</b>	-0.00110924	0.000488281

Tolérance en X trouvée en 11 itérations.

## **Méthode d'interpolation linéaire** (‘regula falsi’ method)

Basée aussi sur une alternance de signe

### **Départ:**

$X_1$  et  $X_2$  telles que  
 $F(X_1)$  et  $F(X_2)$  sont de signes opposés

### **Itérations:**

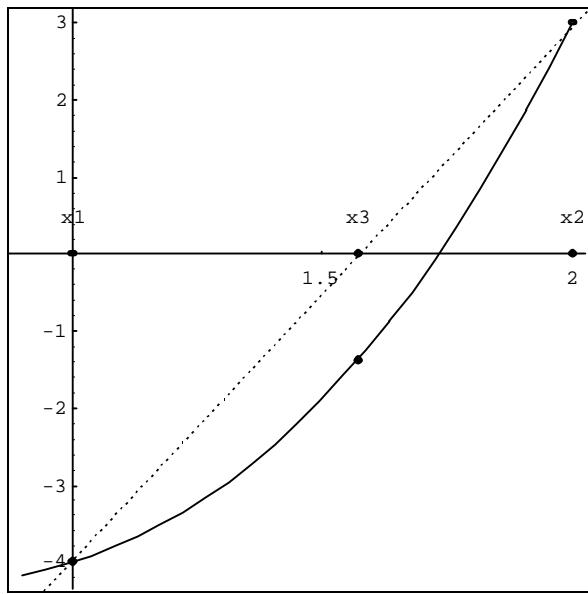
$X_3$  est l'intersection avec l'axe des x  
de la droite passant par

$(X_1, F(X_1))$  et  $(X_2, F(X_2))$

choisir le sous intervalle contenant la racine

**Condition suffisante**  
(de convergence vers une racine):

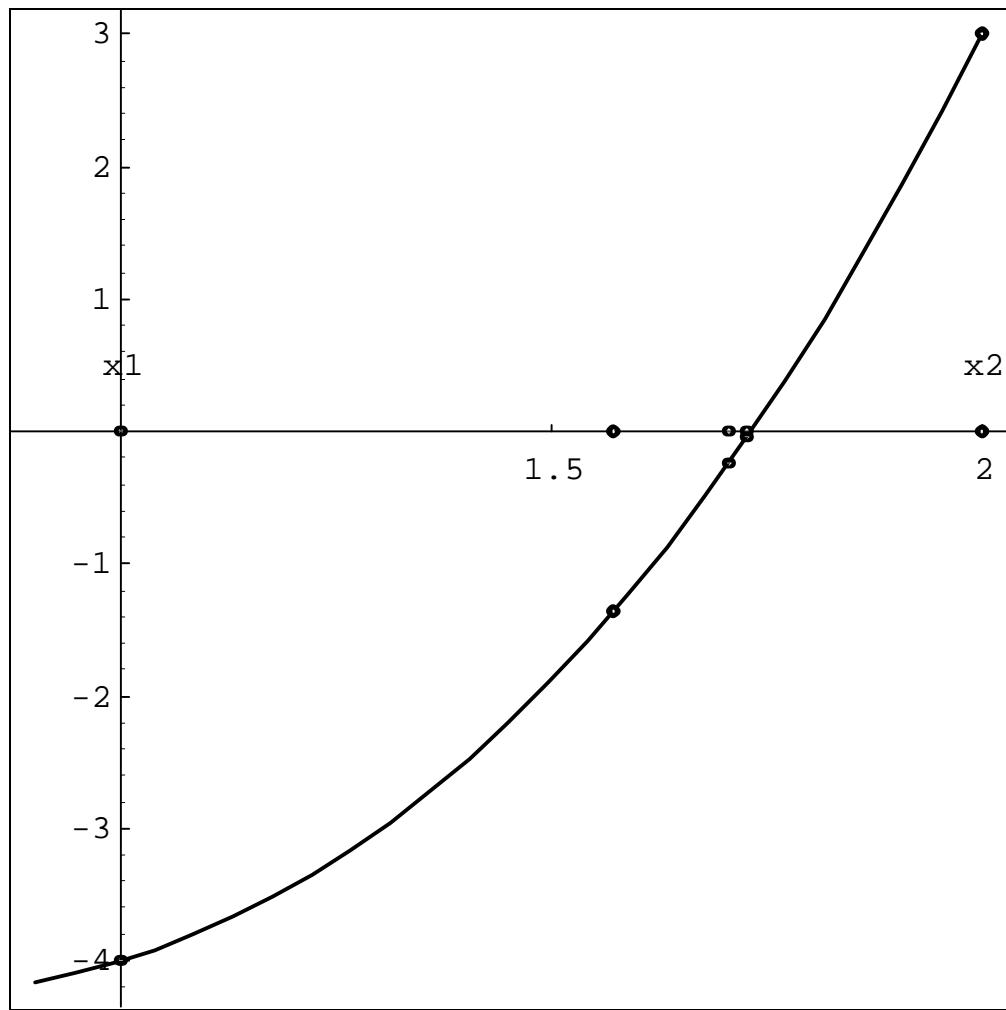
$F$  est continue sur l'intervalle de recherche  $[ X_1, X_2 ]$



Droite parallèles  
dans un triangle

$$\frac{x_2 - x_3}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2)}{f(x_2) - f(x_1)}$$

**Méthode  
d'interpolation linéaire**



## Algorithme de la méthode d'interpolation linéaire:

Pour déterminer une racine  $x$  de  $F(X)$ , exacte à  $\delta$  près.

Choisir  $X_1$  et  $X_2$  tels que  $F(X_1) \cdot F(X_2) \leq 0$

( $F(X_1)$  et  $F(X_2)$  sont de signes opposés)

**Calculer**  $X_3 = X_2 - F(X_2)(X_2 - X_1) / (F(X_2) - F(X_1))$  ;

**Tant que**  $\{ |X_1 - X_2| \geq \delta \text{ et } |F(X_3)| \geq \varepsilon \}$  **faire**

**Calculer**  $X_3 = X_2 - F(X_2)(X_2 - X_1) / (F(X_2) - F(X_1))$  ;

**Si**  $\{ F(X_1) \cdot F(X_3) \leq 0 \}$  **alors**

    poser  $X_2 = X_3$  ;

**Sinon**

    poser  $X_1 = X_3$  ;

**Fin si**

**Fin tant**

Poser  $X = X_3$  ;

Mêmes **avantages** que la méthode de bisection:

- Hypothèse faible (continuité) sur  $F$
- Méthode facile à implanter
- Hypothèse de recherche: linéarité

Mêmes **inconvénients** que la méthode de bisection:

- Il faut déterminer un intervalle de départ

- La convergence vers la racine peut être très lente

## Méthode d'interpolation linéaire

Exemple :

fonction considérée:  $-3 + x (-3 + x (1 + x))$  ou  $-3 - 3x + x^2 + x^3$

Estimations initiales:

$$x_1 = 1.$$

$$x_2 = 2.$$

Tolérance sur  $x: 0.0005$

Tolérance sur  $f(x): 0.00001 = 10^{-5}$

Maximum d'itération: 100

Itér	x3	f(x)	$ x_1 - x_2  =$	$ x_1 - x_3  =$	$ x_3 - x_2 $
1	1.571428571	-1.36443	1.	0.5714285714	0.4285714286
2	1.705410822	-0.247745	0.4285714286	0.1339822502	0.2945891784
3	1.727882728	-0.0393396	0.2945891784	$2.24719068 \cdot 10^{-2}$	0.2721172715
4	1.731404866	$-6.11067 \cdot 10^{-3}$	0.2721172715	$3.52213735 \cdot 10^{-3}$	0.2685951342
5	1.731950853	$-9.45921 \cdot 10^{-4}$	0.2685951342	$5.45986904 \cdot 10^{-4}$	0.2680491473
6	1.732035344	$-1.46349 \cdot 10^{-4}$	0.2680491473	$8.44911020 \cdot 10^{-5}$	0.2679646561
7	1.732048415	$-2.26406 \cdot 10^{-5}$	0.2679646561	$1.30714566 \cdot 10^{-5}$	0.2679515847
8	<u>1.732050437</u>	<u><math>-3.50252 \cdot 10^{-6}</math></u>	0.2679515847	$2.02217663 \cdot 10^{-6}$	0.2679495625

$$x_3 = 1.732050437$$

Tolérance en  $f(X)$  trouvée en 8 itérations.

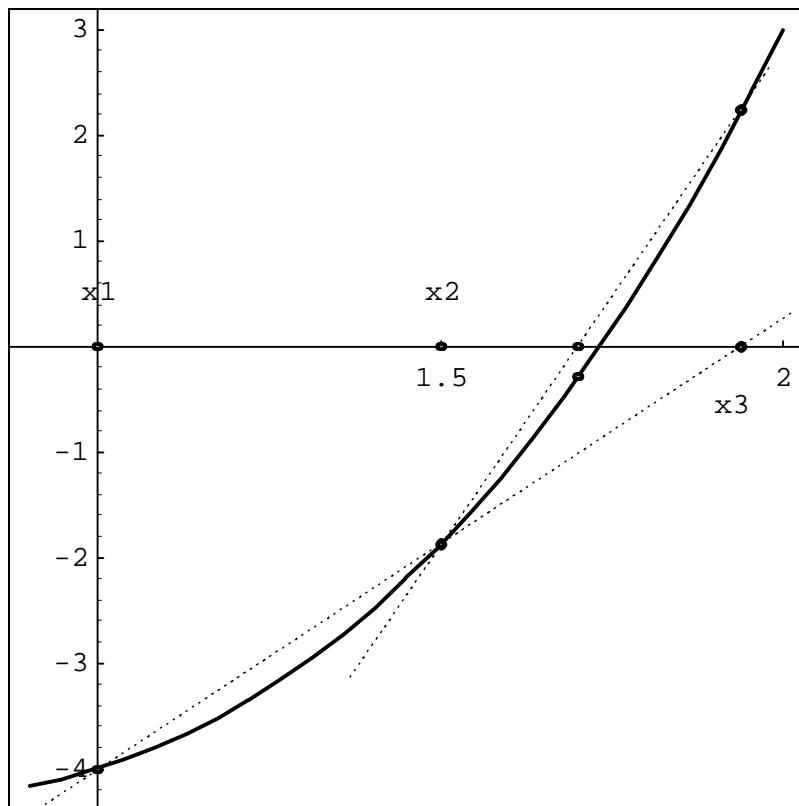
## Méthode de la sécante (secant method)

Similaire à l'interpolation linéaire  
mais permet l'**extrapolation**.

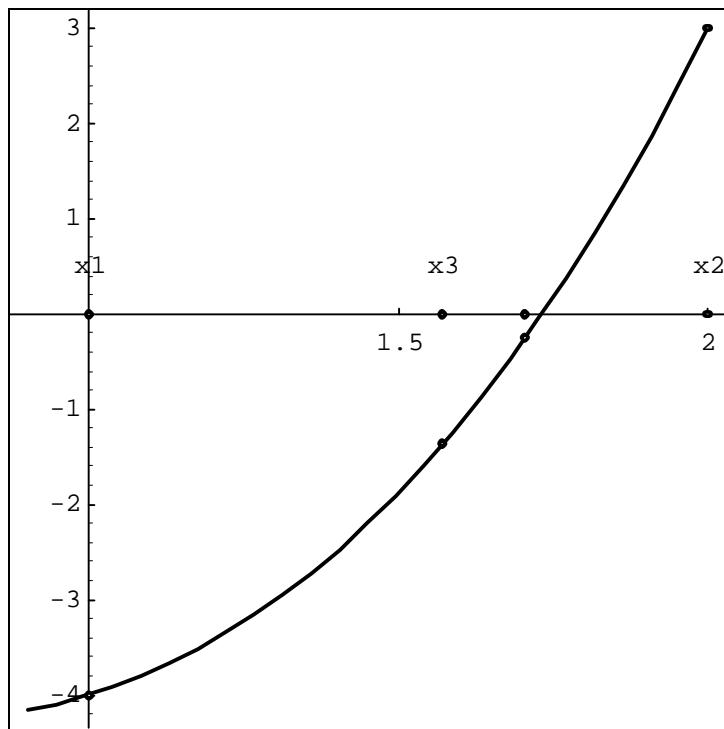
Dans cette méthode, on choisit toujours les  
deux valeurs telles que  
les  $F(X_i)$  sont les plus proches de 0.

Et on a toujours

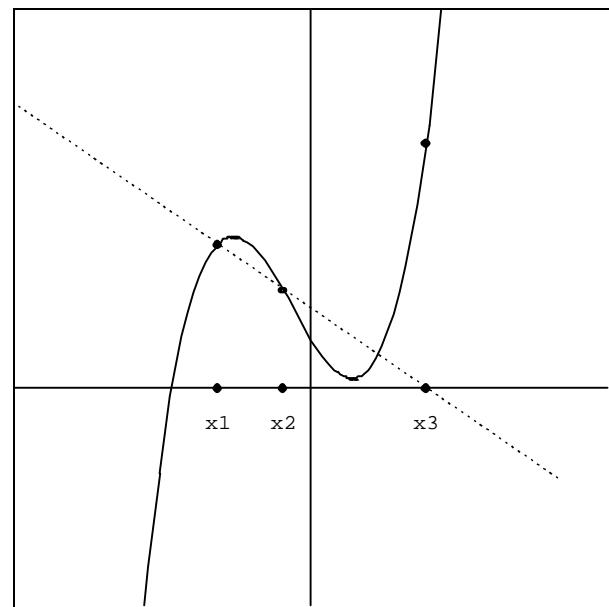
$$X_3 = X_2 - F(X_2) \frac{X_2 - X_1}{F(X_2) - F(X_1)}$$



Exemple :



## Problème de la méthode de la sécante



## Méthode de la sécante

Exemple :

fonction considérée:  $-3 + x (-3 + x (1 + x))$  ou  $-3 - 3x + x^2 + x^3$

Estimations initiales:

$$x_1 = 1.$$

$$x_2 = 2.$$

Tolérance sur x: 0.0005

Tolérance sur  $f(x)$ : 0.00001 =  $10^{-5}$

Maximum d'itération: 100

Itér	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$f(x_3)$	$ x_1 - x_2 $
1	1.	2.	1.571428571	-1.36443	1.
2	2.	1.571428571	1.705410822	-0.247745	0.4285714286
3	1.571428571	1.705410822	1.735135771	0.0292554	0.1339822502
4	1.705410822	1.735135771	1.731996371	$-5.15177 \cdot 10^{-4}$	0.02972494902
5	1.735135771	1.731996371	<u>1.732050698</u>	$-1.039 \cdot 10^{-6}$	0.003139399878

$$x_3 = 1.732050698$$

Tolérance en  $f(X)$  trouvée en 5 itérations.

Remarque importante :

Départ : points quelconques dans le voisinage d'une racine.

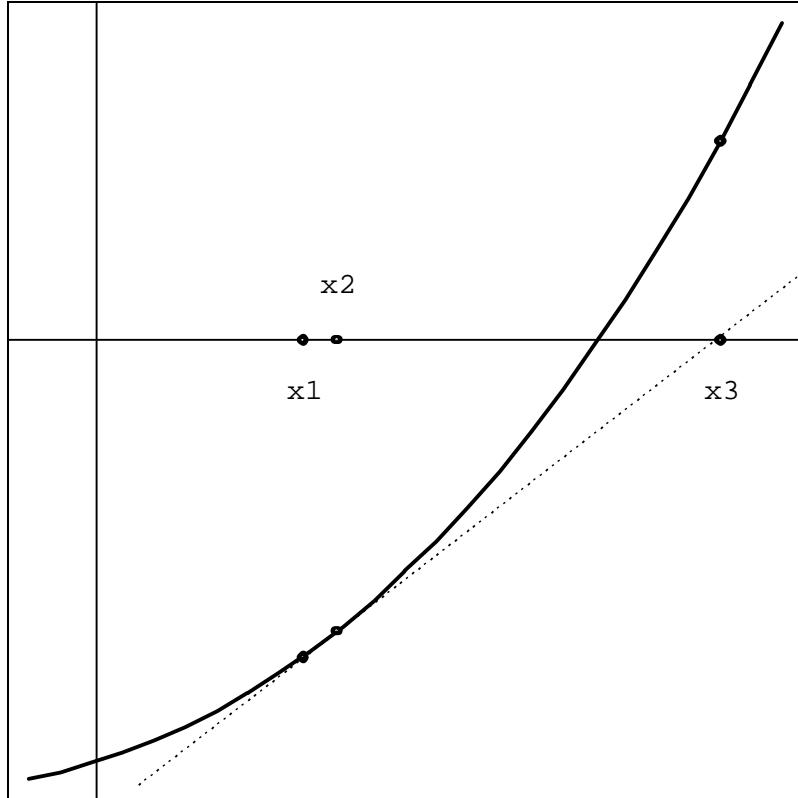
Faire un graphique grossier de la fonction aide parfois beaucoup.

Question ?

Qu'arrive-t-il lorsque

$X_1$  tend vers  $X_2$  ?

$$X_3 = X_2 - F(X_2) \frac{X_2 - X_1}{F(X_2) - F(X_1)}$$

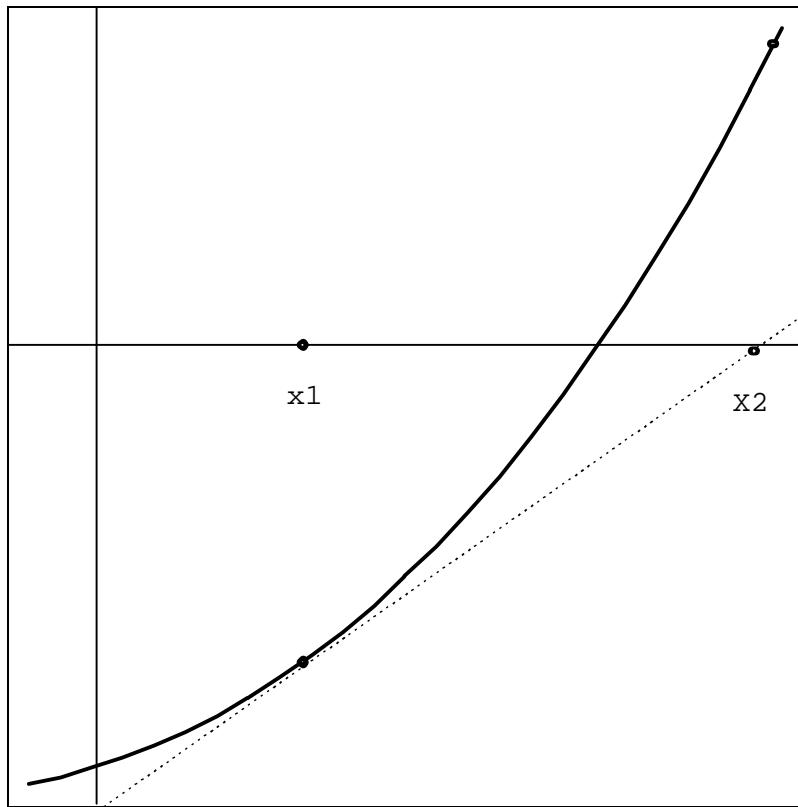


## Méthode de Newton (Newton's Method)

Ne demande qu'une seule valeur de départ  $X_1$ .

Mais suppose l'existence de la dérivée de la fonction  $F(X)$ .

$$\tan(q) = \frac{F(X_1)}{X_2 - X_1}$$



## Algorithme de la méthode de Newton

Pour déterminer une racine de  $F(X)=0$ , exacte à  $\delta$  près.

Choisir  $X_1$ , une valeur approché de la racine

```
Poser  $X_2 = X_1$ ;  
Calculer  $X_{21} = X_1 - F(X_1) / F'(X_1)$ ;  
  
Tant que {  $|X_1 - X_2| \geq \delta$  et  $|F(X_2)| \geq \varepsilon$  et  $F'(X_1) \neq 0$  }  
faire  
    Poser  $X_2 = X_1$ ;  
    Calculer  $X_1 = X_1 - F(X_1) / F'(X_1)$ ;  
  
Fin si  
Fin tant  
Poser  $X = X_1$ ;
```

Avantages :

Convergence rapide.  
Une seule valeur de départ.

Inconvénients :

$F'$  doit exister.

Evalue  $F(X)$  et  $F'(X)$ .

## Méthode de Newton

Exemple :

fonction considérée:  $-3 + x (-3. + x (1 + x))$  ou  $-3 - 3. x + x^2 + x^3$

Estimations initiales:

$$x_1 = 2.$$

Tolérance sur x: 0.0005

Tolérance sur  $f(x)$ :  $10^{-5}$

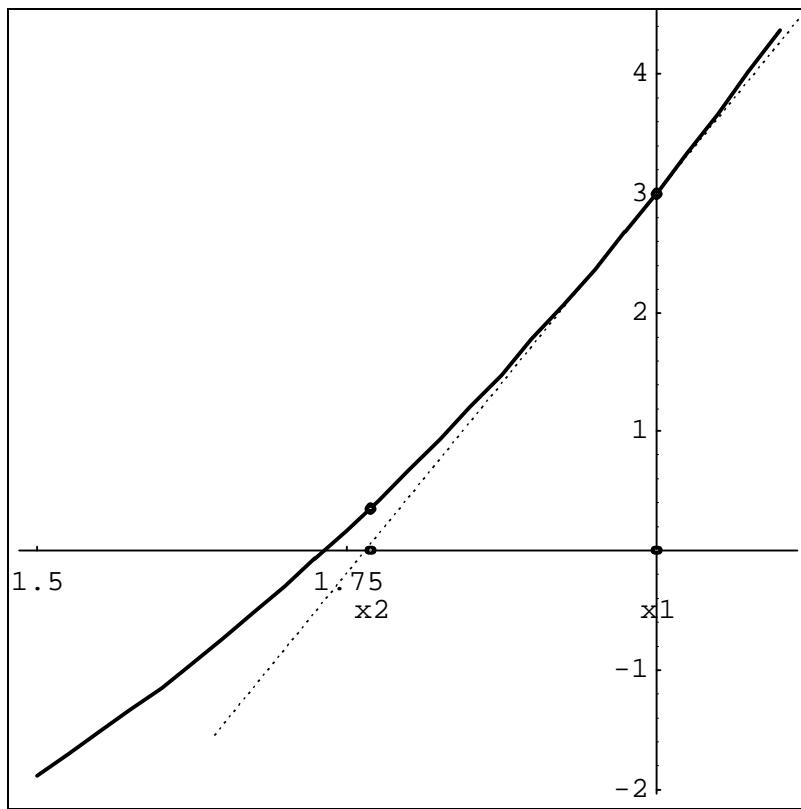
Maximum d'itération: 100

Itération	$x_1$	$x_2$	$f(x_2)$	$ x_1 - x_2 $
1	2.	1.769230769	0.360492	0.2307692308
2	1.769230769	1.73292381	0.00826691	0.03630695883
3	1.73292381	<u>1.732051306</u>	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">4.71824 <math>10^{-6}</math></span>	0.000872504288

$$x_2 = 1.732051306$$

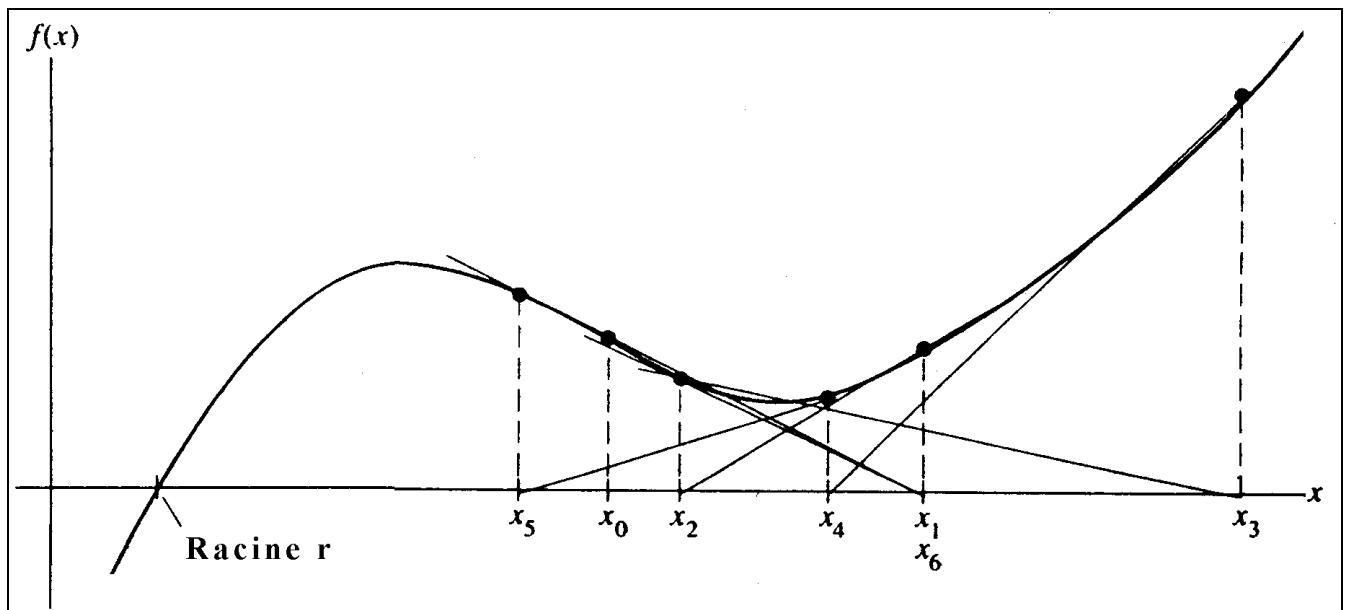
Tolérance en  $f(X)$  trouvée en 3 itérations.

Exemple :



# Problème de la méthode de Newton

La méthode de Newton est-elle toujours efficace ?



## Développement formel de la méthode de Newton

Connaissant une approximation

$$X_n \approx r$$

pour la racine telle que  $F(X_n) \neq 0$ ,

cherchons à corriger

$$X_{n+1} = X_n + \delta$$

pour avoir  $F(X_{n+1}) = 0$

$$F(X_{n+1}) = F(X_n + \delta)$$

$$\approx F(X_n) + \delta F'(X_n)$$

donc

$$\delta = - F(X_n) / F'(X_n)$$

ce qui est la méthode de Newton

$$X_{n+1} = X_n - \frac{F(X_n)}{F'(X_n)}$$

Remarques :

- Si on a convergence

$$X_{n+1} = X_n$$

on déduit de l'algorithme que

$$X = X - \frac{F(X)}{F'(X)}$$

$$\text{donc } F(X) = 0 \Rightarrow X = r$$

- Le développement de l'algorithme de Newton est de la forme :

$$X_{n+1} = G(X_n)$$

avec

$$G(X) = X - \frac{F(X)}{F'(X)}$$

racine lorsque  $X = G(X)$

## Méthode du point fixe

(  $x = g(x)$  méthode)

Réarrangement de  $f(x) = 0$   
pour une forme  
 $x = g(x)$

Un point fixe  $x = r$  est solution de  $x = g(x)$   
alors  
 $x = r$  est solution de  
 $f(x) = 0$

Méthode des itérations :  
 $x_{n+1} = g(x_n)$

### Algorithme de la méthode du point fixe

Choisir un réarrangement de  $f(x) = 0$  de la forme  $x = g(x)$ ,

**Poser**  $X_2 = X_1$  ;

**Répéter**

**Poser**  $X_1 = X_2$  ;  
**Calculer**  $X_2 = g(X_1)$  ;

**Tant que** {  $|X_1 - X_2| \geq \delta$  }

Poser  $X = X_1$  ;

Exemple :

$$f(x) = x^2 - 2x - 3 = 0$$

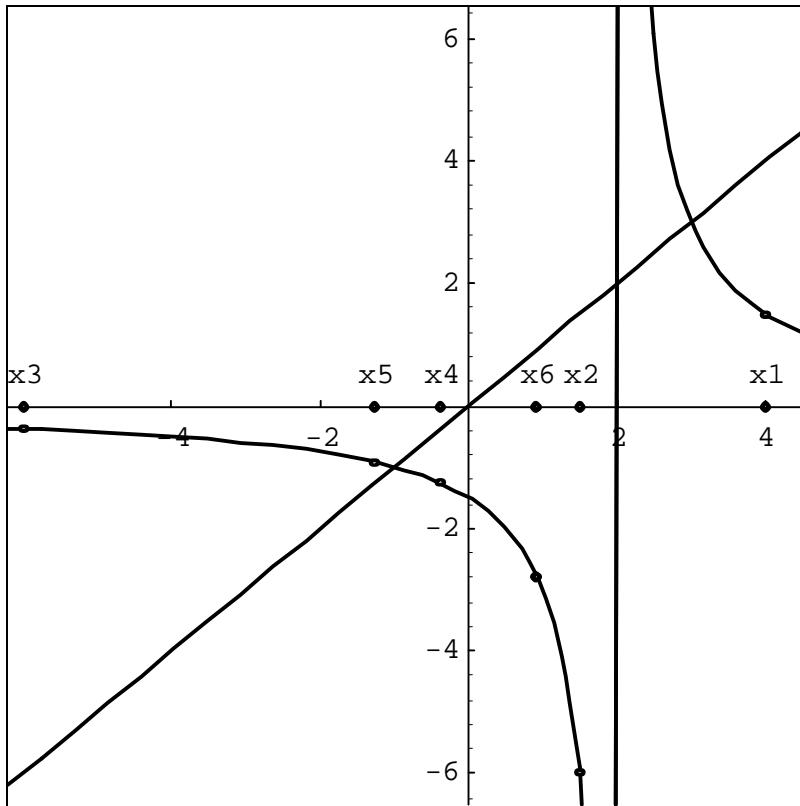
deux racines :  $r_1 = -1$  et  $r_2 = 3$

valeur de départ :  $x_1 = 4$

Différentes formes  $x = g(x)$   
à partir de  $f(x)=0$

- $g(x) = \frac{3}{x-2}$

**Graphiquement :**



$$\begin{aligned}
 x &= g(x) \\
 \Leftrightarrow \\
 \begin{cases} y = g(x) \\ y = x \end{cases}
 \end{aligned}$$

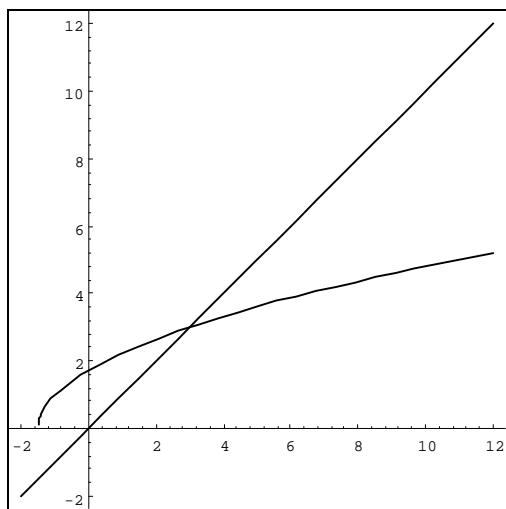
Estimations initiales:  $x_1 = 4$ .

Tolérance sur  $x: 0.0005$  et Maximum d'itération: 100

Itération	$x_1$	$x_2$	$ x_1 - x_2 $
1	4.	1.5	2.5
2	1.5	-6.	7.5
3	-6.	-0.375	5.625
4	-0.375	-1.26316	0.888158
5	-1.26316	-0.919355	0.343803
6	-0.919355	-1.02762	0.108269
7	-1.02762	-0.990876	0.0367484
8	-0.990876	-1.00305	0.0121747
9	-1.00305	-0.998984	0.00406649
10	-0.998984	-1.00034	0.00135458
11	-1.00034	<b>-0.999887</b>	0.00045162

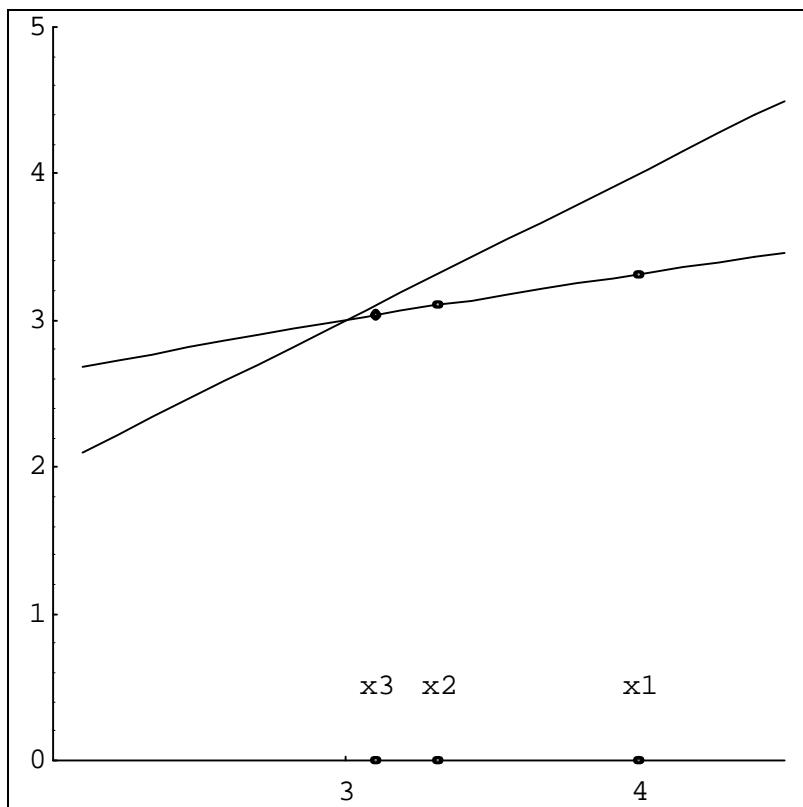
$x_{12} = -0.9998871026$  Converge vers  $r = -1$

- $g(x) = \sqrt{2x+3}$

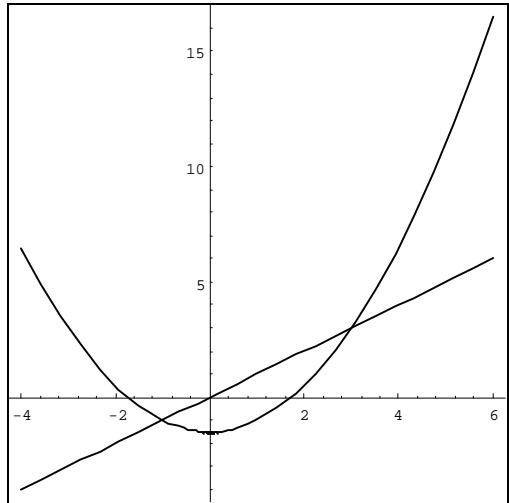


$x_1 = 4.$   
 $x_2 = 3.31662$   
 $x_3 = 3.10375$   
 $x_4 = 3.03439$   
 $x_5 = 3.01144$   
 $x_6 = 3.00381$   
 $x_7 = 3.00127$   
 $x_8 = 3.00042$   
 $x_9 = 3.00014$

Converge vers  $r = 3$

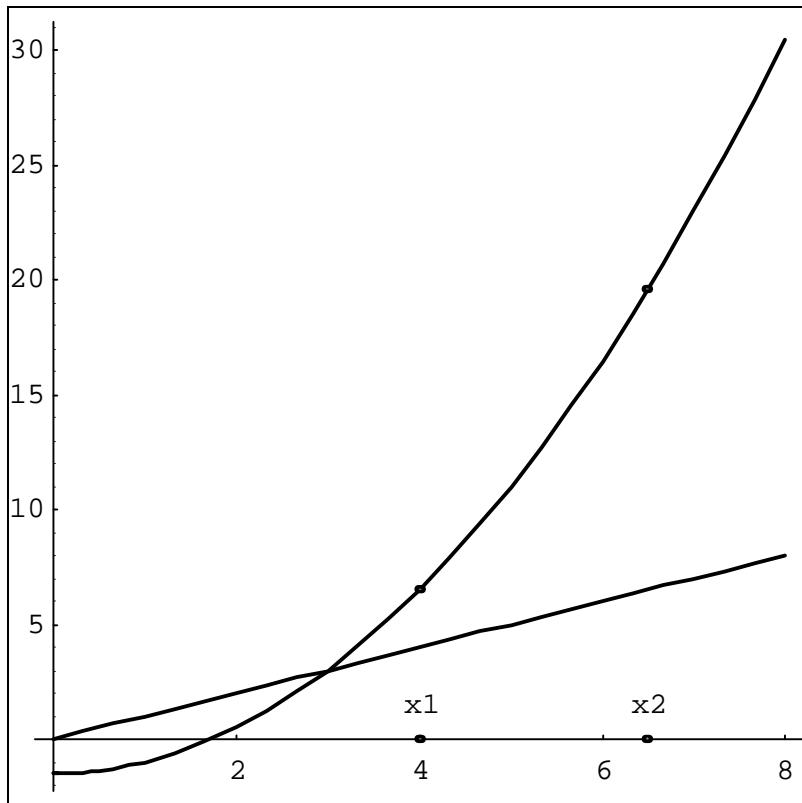


- $g(x) = \frac{x^2 - 3}{2}$



$$\begin{aligned}x_1 &= 4. \\x_2 &= 6.5 \\x_3 &= 19.635 \\x_4 &= 191.267\end{aligned}$$

**Diverge**



Que se passe-t-il si  $x_1 = 0$  ?

# Analyse d'erreurs pour les méthodes itératives

## définition: Caractéristiques de convergence

Supposons que  $\{x_n\}$  converge vers  $x^*$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$$

et que  $e_n = x_n - x^*$  pour tout  $n \geq 0$ .

S'il existe 2 constantes positives  $C$  et  $p$  telles que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_{n+1} - x^*|}{|x_n - x^*|^p} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^p} = C \quad \Rightarrow \quad e_{n+1} \approx C(e_n)^p$$

on dit alors que la convergence de  $\{x_n\}$  est d'**ordre p** avec une **constante asymptotique C < 1**.

Remarques :

- Si  $p = 1$ , convergence linéaire.  
Si  $p = 2$ , convergence quadratique.
- Méthode :  
On essaie avec  $p= 1$  de trouver  $C$ .  
Si on obtient un  $C \neq 0$ , convergence linéaire  
sinon on essaie avec  $p = 2$ .
- On définit souvent l'erreur signée par  
$$e_n = x_n - x^*$$

- La constante asymptotique  $C$  affecte la vitesse de convergence, mais d'une façon moins importante que l'ordre de convergence.

Exemple :

Supposons que  $y_{n+1} = \frac{y_n}{2} + 1$

si convergence

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 2$$

On essaie avec  $p=1$  de trouver  $C$ .

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|y_{n+1} - 2|}{|y_n - 2|^p} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left| \left( \frac{y_n}{2} + 1 \right) - 2 \right|}{|y_n - 2|} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

donc  $p=1$  et  $C = 0.5$

convergence linéaire

## Caractéristiques de convergence

### Méthode de bisection

L'intervalle de confiance pour la méthode de bisection rapetisse selon :

$$\Delta X_n = \frac{|X_1 - X_2|}{2^n}$$

L'erreur à l'itération  $n$  est bornée par

$$|e_n| = \Delta X_n$$

SI on pose  $p = 1$ , on obtient :

$$\begin{aligned} C &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^p} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{|X_1 - X_2|}{2^{n+1}}}{\frac{|X_1 - X_2|}{2^n}} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Donc la méthode de bisection a une convergence linéaire ( $p=1$ ) avec une constante asymptotique  $C = \frac{1}{2}$ .

## Caractéristiques de convergence Méthode d'interpolation linéaire

Pour la Méthode d'interpolation linéaire, on a aussi une convergence linéaire ( $p = 1$ )  $C < 1$ .  
avec une constante asymptotique

$$C = \frac{1}{2} \left| X_2 - X^* \right| \left| \frac{f''(X^*)}{f'(X^*)} \right|$$

$(X_1, X_2)$  un voisinage de  $X^*$ .

- $\frac{1}{2} < C < 1$  Convergence plus lente que pour la bisection.
- $C < \frac{1}{2}$  Convergence plus rapide que pour la bisection.

## Caractéristiques de convergence Méthode de la sécante

Pour la méthode de la sécante, on a une convergence d'ordre non entier avec :

$$p = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1.618\dots$$

(Nombre d'or)

## Caractéristiques de convergence

### Méthode du point fixe

Pour la méthode du point fixe, on a :

$$X_{n+1} = g(X_n) \text{ et } r = g(r)$$

Par le théorème de la moyenne (Livre de référence page A2-A3), on montre que si  $|g'(r)| \neq 0$  :

$$\begin{aligned} X_{n+1} - r &= g(X_n) - g(r) \\ &= \frac{g(X_n) - g(r)}{X_n - r} (X_n - r) \\ &= g'(\mathbf{x}_n)(X_n - r) \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$|e_{n+1}| = |g'(\mathbf{x}_n)| |e_n|$$

Donc la convergence sera linéaire et

$$\begin{aligned} C &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^p} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} |g'(\mathbf{x}_n)| \\ &= |g'(r)| \end{aligned}$$

**Note :**

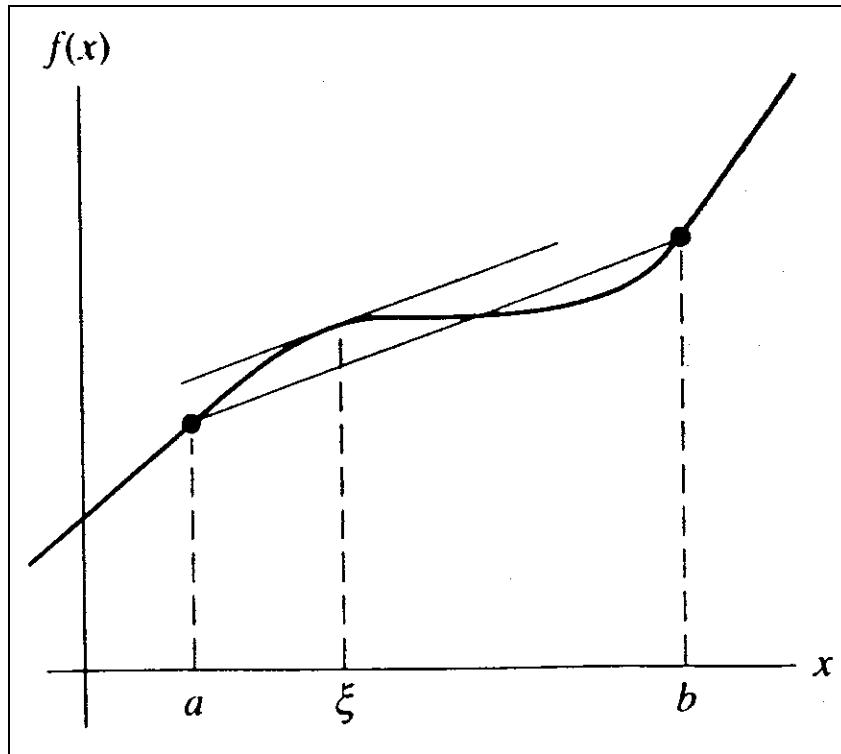
La condition  
 $0 < C < 1$

est **nécessaire** pour avoir une  
convergence linéaire

Ici, il faut que :

$$|g'(r)| < 1 \text{ et } |g'(r)| \neq 0$$

# Théorème de la moyenne



## Théorème de la moyenne pour la dérivée

Si  $f(x)$  est continue sur  $[a,b]$

alors il existe  $\xi$  tel que  $a \leq \xi \leq b$   
et

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

## Théorème de la moyenne appliqué à une intégrale

Si  $f(x)$  est continue et intégrable sur  $[a,b]$

alors il existe  $\xi$  tel que  $a \leq \xi \leq b$   
et

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a) f(\xi)$$

voir page A-2 et A-3 livre référence

# Caractéristiques de convergence

## Méthode du point fixe (autre démonstration)

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = g(x)$$

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= g(x_n) & e_n &= x_n - r & e_{n+1} &= x_{n+1} - r \\ &= g(r + e_n) & & & & \\ &= \underbrace{g(r)}_{1!} + \frac{g'(r)}{1!} e_n + \frac{g''(r)}{2!} e_n^2 + \frac{g'''(r)}{3!} e_n^3 + \dots & & & & (Taylor) \end{aligned}$$

$$e_{n+1} = x_{n+1} - r = \frac{g'(r)}{1!} e_n + \frac{g''(r)}{2!} e_n^2 + \frac{g'''(r)}{3!} e_n^3 + \dots$$

- si  $g'(r) \neq 0$   $\frac{e_{n+1}}{e_n} = g'(r) + \frac{g''(r)}{2!} e_n + \frac{g'''(r)}{3!} e_n^2 + \dots$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|} = |g'(r)| \neq 0 \Rightarrow \text{convergence linéaire}$$

note :  $|g'(r)| < 1$

- si  $g'(r) = 0$  et  $g''(r) \neq 0$

$$\frac{e_{n+1}}{e_n^2} = \frac{g''(r)}{2!} + \frac{g'''(r)}{3!} e_n + \dots$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^2} = \frac{|g''(r)|}{2} \neq 0 \Rightarrow \text{convergence quadratique}$$

- si  $g'(r) = g''(r) = 0$  et  $g'''(r) \neq 0$

$$\frac{e_{n+1}}{e_n^3} = \frac{g'''(r)}{3!} + \frac{g^{(iv)}(r)}{4!} e_n + \dots$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^3} = \frac{|g'''(r)|}{3!} \neq 0 \Rightarrow \text{convergence cubique}$$

### **Remarque :**

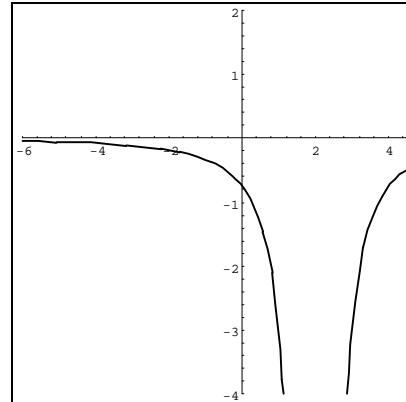
Une condition suffisante de convergence de la suite des approximations est que la valeur absolue de la pente de  $F$  soit inférieure à 1 dans un voisinage de la racine  $r$ , et que  $x_0$  le point de départ soit dans ce voisinage.

## Notes :

- $g(x) = \frac{3}{x-2}$

$$g'(x) = \left| \frac{-3}{(x-2)^2} \right| < 1$$

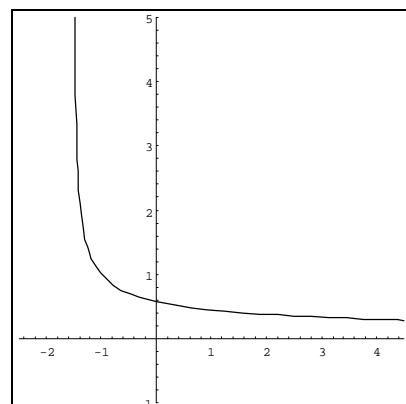
Toujours



- $g(x) = \sqrt{2x+3}$

$$g'(x) = \left| \frac{1}{\sqrt{2x+3}} \right| < 1$$

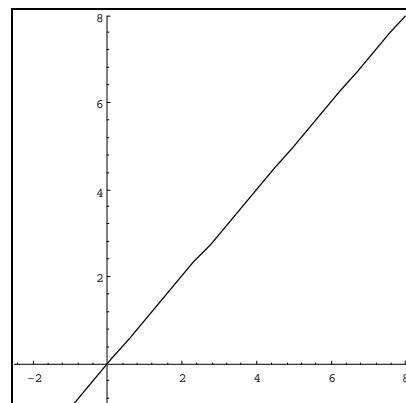
sur l'intervalle de convergence



- $g(x) = \frac{x^2 - 3}{2}$

$$g'(x) = |x| > 1$$

sur l'intervalle  
 $I = ]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$



## Caractéristiques de convergence

### Méthode de Newton

La méthode de Newton est une méthode de point fixe avec

$$G(X) = X - \frac{F(X)}{F'(X)}$$

En se servant du résultat précédent, on calcule  $G'(r)$

$$G'(r) = 1 - \frac{F'(r)F'(r) - F(r)F''(r)}{(F'(r))^2} = \frac{F(r)F''(r)}{(F'(r))^2}$$

Mais  $F(r) = 0$

Si la racine est **simple** en  $X = r$ ,  
on aura  $G'(r) = 0$

On va donc développer  $G(X)$  au second ordre en  $X = r$

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= G(X_n) = G(r + e_n) \\ &= G(r) + G'(r)e_n + \frac{1}{2}G''(\mathbf{x}_n)e_n^2 \\ &= r + 0 \cdot e_n + \frac{1}{2}G''(\mathbf{x}_n)e_n^2 \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{2} G''(\mathbf{x}_n) \right| = \left| \frac{1}{2} G''(r) \right|$$

$\Rightarrow$  convergence quadratique ( $p=2$ ).

## Multiplicité d'une racine

Définition :

L'ordre (ou la multiplicité) d'une racine en  $X = r$  est le plus petit entier  $m$  pour lequel on ait

$$F(X) = (X - r)^m H(X)$$

avec  $H(r) \neq 0$

Exemple :  
 $F(X) = (X - 3)^3$   
 $F(r) = 0$

$$F'(r) = 3(X - 3)^2 = 0$$

### Remarques :

1. Si  $m = 1$ , on dit que  $r$  est une racine simple.
2. Si  $m \geq 2$ , on dit que  $r$  est une racine multiple.

Pour la méthode de Newton, dans le cas de racines multiples, on a une dérivée première

$$F'(X) = (X - r)^{m-1} \{m H(X) + (X - r) H'(X)\}$$

et une dérivée seconde

$$F''(X) = (X - r)^{m-2} \{m(m-1) H(X) + 2m(X - r) H'(X) + (X - r)^2 H''(X)\}$$

donc

$$G'(X) = \frac{F(X)F''(X)}{(F'(X))^2}$$
$$= \frac{H(X)\{m(m-1)H(X) + 2m(X-r)H'(X) + (X-r)^2 H''(x)\}}{(mH(X)+(X-r)H'(X))^2}$$

$$\text{donc } |G'(r)| = (m - 1)/m$$

La convergence est linéaire avec  $C = (m - 1)/m$ .

### Remarques :

1. Pour la convergence linéaire, à chaque itération (à la limite), on gagne un nombre constant de CSE.
2. Pour la convergence quadratique, à chaque itération (à la limite), on gagne le double du **nombre** de CSE gagnés à l'itération précédente.

$$X_n = \underline{1.23456789}$$

$$\Delta X_n \leq 0.005$$

Convergence quadratique

$$\Delta X_{n+1} = C (\Delta X_n)^2 = 0.000025$$

$$\Delta X_{n+1} \leq 0.00005$$

$$X_{n+1} = \underline{1.23456789}$$

$$\Delta X_{n+2} = C (\Delta X_{n+1})^2 \leq 2.5 \cdot 10^{-9}$$

$$\Delta X_{n+1} \leq 0.5 \cdot 10^{-8}$$

$$X_{n+2} = \underline{1.23456789}$$

### Résumé :

1. Bisection et interpolation linéaire :

Convergence linéaire avec  $p = 1$

2. Sécante :

Convergence avec  $p = 1.62$

3. Newton :

Racine simple : Convergence quadratique  $p = 2$

Racine multiple : Convergence linéaire :  $p = 1$

4. Point fixe :

$p = 1$ , Convergence linéaire.

$g'(x) = 0$ , Convergence quadratique  $p = 2$

$g''(x) = 0$ , Convergence cubique  $p = 3$

# Critères de convergence

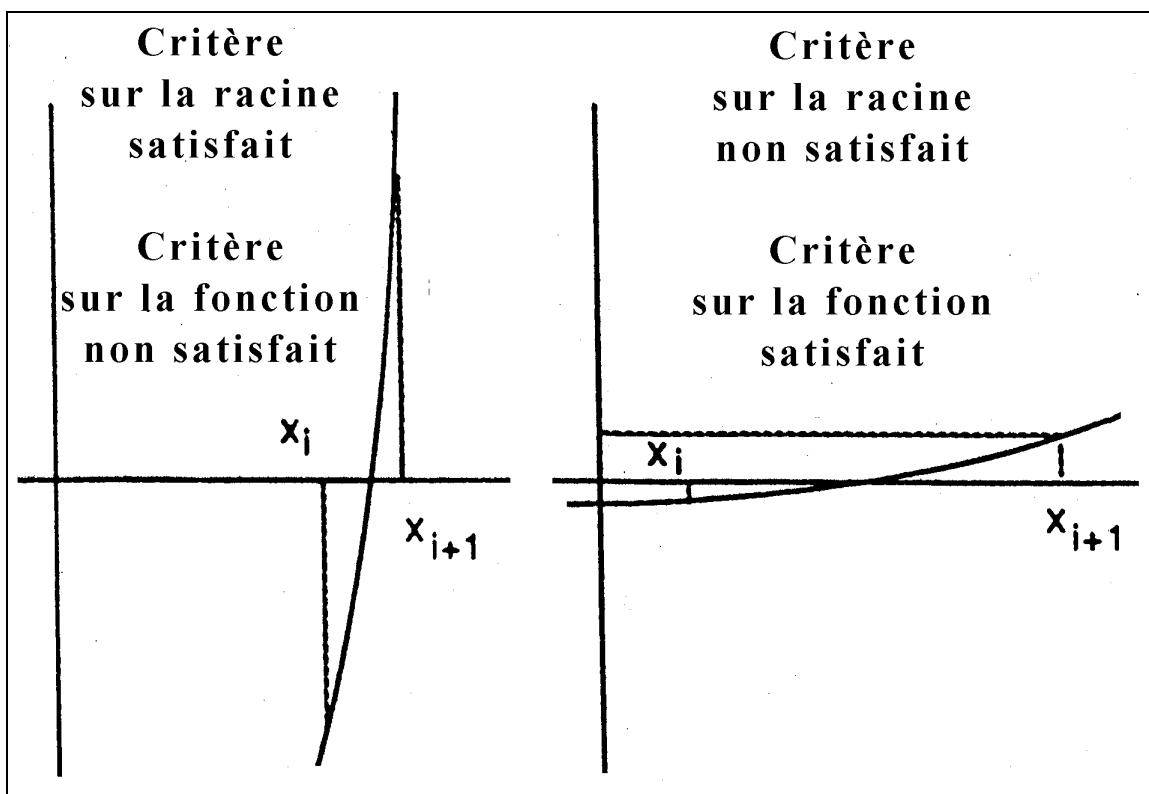
1. On converge parce que deux valeurs successives sont assez rapprochées.

$$|X_{i+1} - X_i| < \text{Tolérance sur la racine}$$

2. On converge parce que la fonction en un point est suffisamment proche de 0.

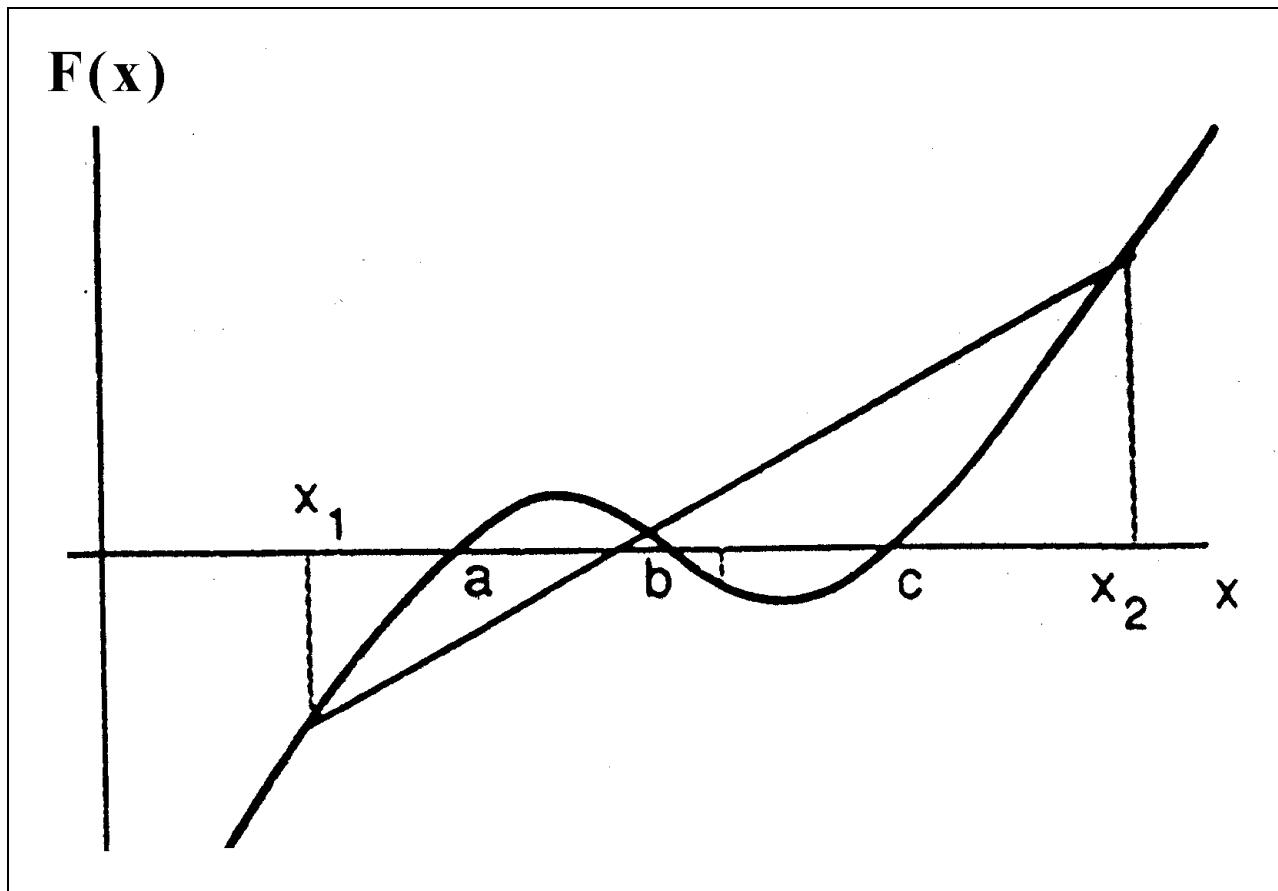
$$|F(X_{i+1})| < \text{Tolérance sur la fonction}$$

3. Il arrive de combiner les deux conditions.

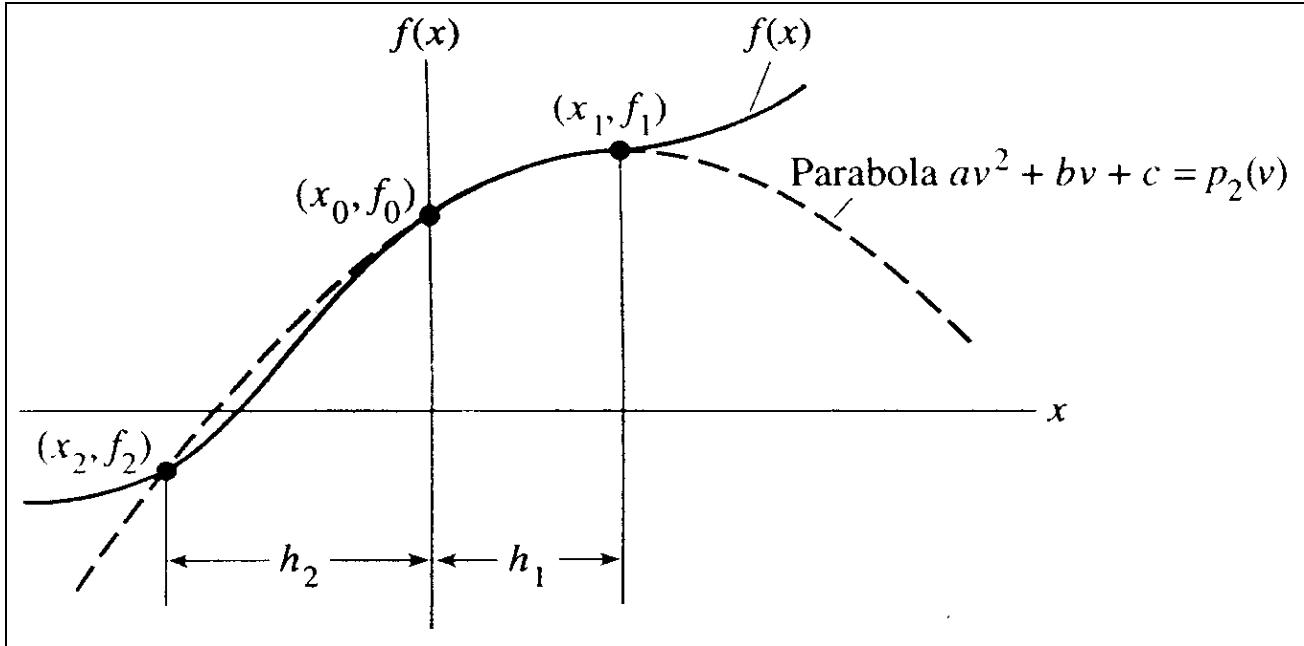


Il y a ici 3 racines  $\{a, b, c\}$   
Où converge-t-on ?

Bisection ?  
Interpolation Linéaire ?  
Sécante ?  
Newton ?



## Méthode de Muller



$$\text{Parabole : } a(X - X_0)^2 + b(X - X_0) + C = P(X) = 0$$

On trouve a, b et c à partir du système d'équation :

$$\begin{cases} P(X_0) = f(X_0) \\ P(X_1) = f(X_1) \\ P(X_2) = f(X_2) \end{cases}$$

Puis les racines de la parabole :

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + X_0$$

On choisit enfin le nouveau  $X_3$  (le plus près de  $X_0$ ) et on reprend les itérations.