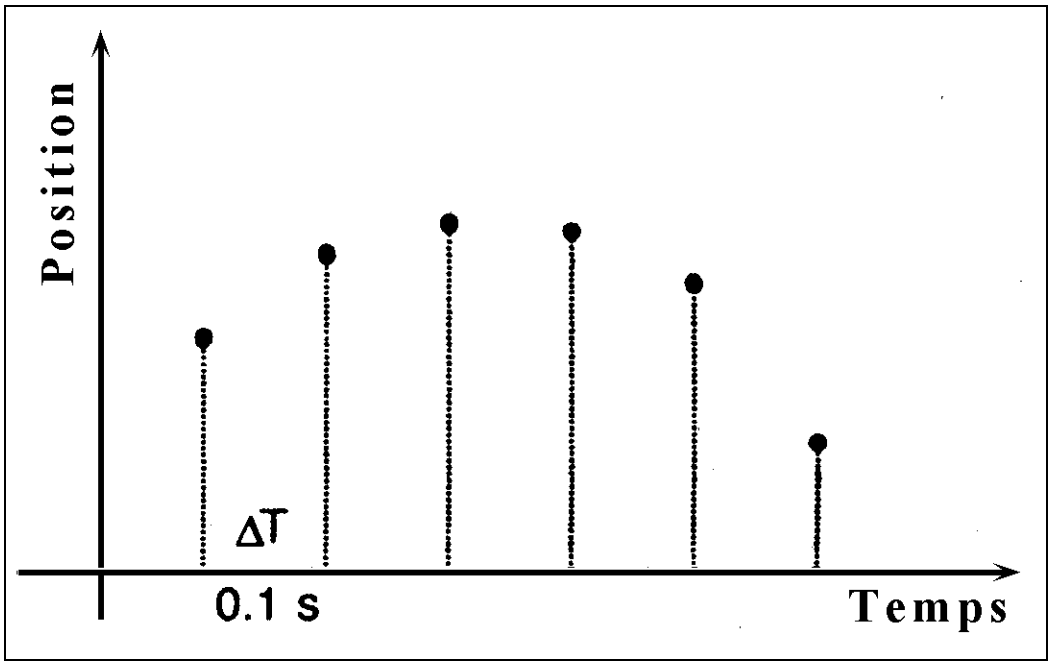
Ift 2421

Chapitre 4

Interpolation polynomiale : Collocation

Introduction



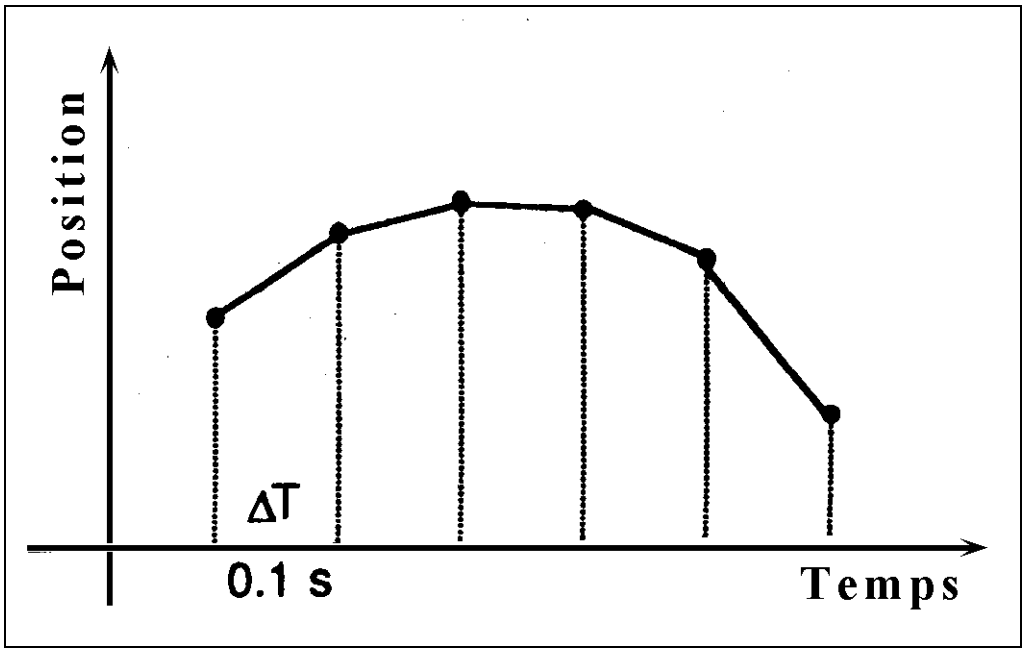
Lancement d'une fusée.
Déterminer la trajectoire avec précision.

La position n'est alors connue qu'en fonction d'un certain nombre de points d'abscisses fixes.

Le problème consiste à évaluer cette fonction ailleurs qu'aux points donnés.

Interpolation

Extrapolation



Linéarisation par morceaux

Droite entre deux points consécutifs.

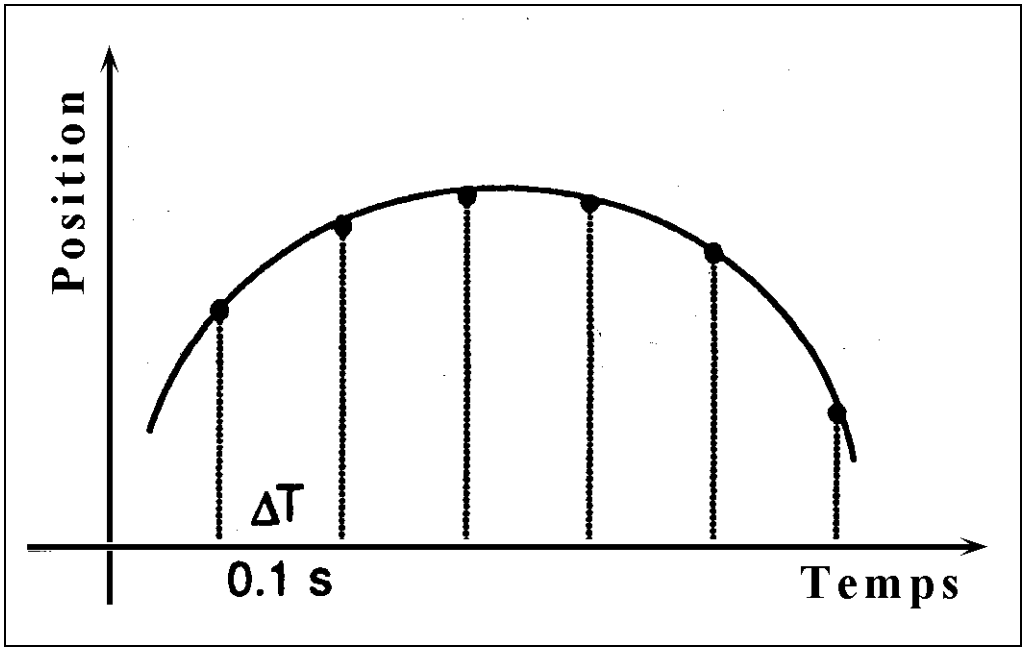
Méthode en général imprécise.

Méthode de collocation

Trouver un polynôme
qui passe par tous les points donnés.

Avec (x_0,f_0), (x_1,f_1), (x_2,f_2), ... , (x_n,f_n) et $x_i \neq x_j$
Il y a n+1 conditions.

Trouver le polynôme $P_n(x)$ tel que
$P_n(x_i) = f_i$ pour i = 0, 1, ... , n



Exemple :

2 points → droite y = ax + b
(polynôme de degré 1)

3 points → parabole
$y = ax^2 + bx + c$
(polynôme de degré 2)

Remarque :

Quelque soit la méthode, le polynôme de collocation sera toujours le même.

Recherche de $P_n(x)$: première approche

$P_n(x)$ est donné par :

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$$

Le polynôme de collocation vérifie les n+1 conditions :

$$P_n(xi) = f_i \qquad \text{pour } i = 0, 1, ..., n.$$

Les n+1 coefficients $a_0, a_1, ..., a_n$ sont donnés
par la résolution du système
de n+1 équations et n+1 inconnues :

$$P_n(x_0) = a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + ... + a_n x_0^n$$
$$P_n(x_1) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + ... + a_n x_1^n$$
$$...$$
$$P_n(x_n) = a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + ... + a_n x_n^n$$

Remarque :

Cette approche n'est pas un moyen pratique de calculer $P_n(x)$.

Unicité du polynôme de collocation

théorème:

Le polynôme de collocation de degré **n**
qui satisfait les **n+1** conditions
$P_n(x_i) = f_i$ pour i = 0, 1 , ..., n
est **unique**.

Preuve:

Supposons l'existence de deux polynômes de collocation
P_n et Q_n qui satisfont les n+1 conditions
$P_n(xi) = f_i$ pour i = 0, 1 , ..., n.
$Q_n(xi) = f_i$ pour i = 0, 1 , ..., n.

$D(x) = P_n(x) - Q_n(x)$
est au plus de degré n.

$D(x_i) = P_n(x_i) - Q_n(x_i) = f_i - f_i = 0$

donc possède au moins n+1 racines : i = 0, 1 , ..., n.

Or un polynôme de degré n ne peut pas posséder
plus de n racines.
La seule possibilité D = 0.
Donc $P_n = Q_n$

Existence du polynôme de collocation

1.Cas linéaire (n = 1)

Avec $P_0(x_0,f_0)$ et $P_1(x_1,f_1)$, 2 conditions

Cherchons $P_1(x) = a_0 + a_1 x$

conditions de collocation:

$$P_1(x_0) = a_0 + a_1 x_0 = f_0$$
$$P_1(x_1) = a_0 + a_1 x_1 = f_1$$

Solution sous la forme

$$P_1(x) = \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} f_0 + \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} f_1$$

$\Rightarrow$ polynôme de Lagrange de degré 1.

Note: $\det(A) = (x_1 - x_0) \neq 0$ si $x_1 \neq x_0$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ A régulière
$\Rightarrow$ Solution a_0, a_1 unique
$\Rightarrow$ $P_1(x)$ unique

Exemple:

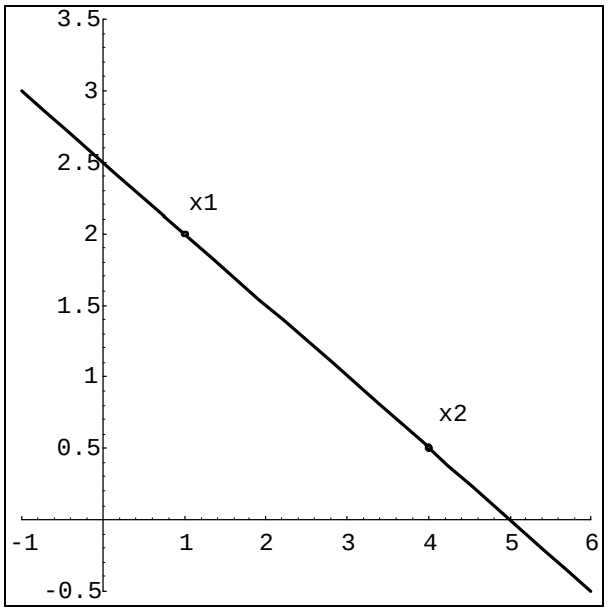
Trouver le polynôme de collocation
passant par les deux points

x_i : 1.0 4.0
f_i : 2.0 0.5

$$P_1(x) = \frac{(x-4)}{(1-4)}2.0 + \frac{(x-1)}{(4-1)}0.5$$

$$P_1(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{8}{3} + \frac{1}{6}x - \frac{1}{6}$$

$$P_1(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$



Existence du polynôme de collocation

2.Cas parabolique { n = 2 }

Avec (x_0,f_0), (x_1,f_1) et (x_2,f_2).

3 conditions

$$P_2(x_0) = a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 = f_0$$
$$P_2(x_1) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 = f_1$$
$$P_2(x_2) = a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 = f_2$$

Pour avoir une solution unique:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \det\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 0 & x_1 - x_0 & x_1^2 - x_0^2 \\ 0 & x_2 - x_0 & x_2^2 - x_0^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(A) &= (x_1 - x_0)(x_2^2 - x_0^2) - (x_2 - x_0)(x_1^2 - x_0^2) \\ &= (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_2 + x_0) - (x_2 - x_0)(x_1 - x_0)(x_1 + x_0) \\ &= (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)[x_2 + x_0 - x_1 - x_0] \\ &= (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \end{aligned}$$

$$\det(A) \neq 0 \text{ si } x_i \neq x_j$$

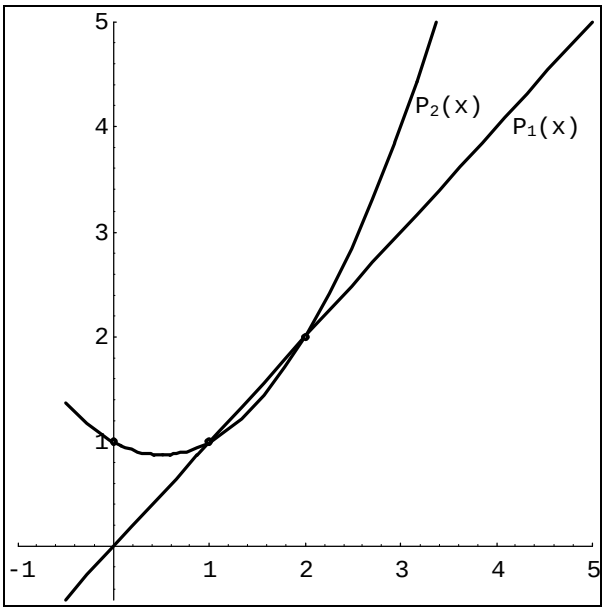
Solution sous la forme

$$P_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f_2$$

$\Rightarrow$ polynôme de Lagrange de degré 2.

Exercice :
Interpoler F(1.7) dans la table

x	F(x)
0	1
1	1
2	2



1. Interpolation linéaire

$P_1(x) = x$

$P_1(1.7) = 1.7$

2. Interpolation quadratique

$P_2(x) = ½ (x^2 - x + 2)$

$P_2(1.7) = 1.595$

Formulation générale de la méthode de Lagrange

Soient les conditions de collocation:

x	f(x)
x_0	f_0
x_1	f_1
...	...
x_n	f_n

Définissons le polynôme

$$\mathrm{p}_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (x - x_j) \qquad pour \;\; i = 0,1,...,n$$

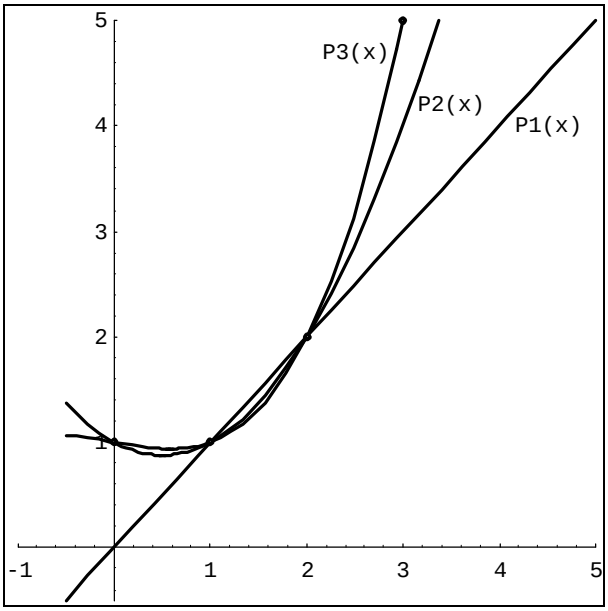
alors le polynôme $P_n(x)$ défini par

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\mathrm{p}_i(x)}{\mathrm{p}_i(x_i)} f_i$$

satisfait les conditions de collocation.

Exercice (suite):
Nous ajoutons un point

x	F(x)
0	1
1	1
2	2
3	5



3.Interpolation cubique

$$P_3(x) = \frac{1}{6}(x^3 - x + 6)$$

$P_3(1.7) = 1.5355$

Inconvénients de méthode
de Lagrange

1.) il y a beaucoup d'opérations à faire pour calculer le polynôme de collocation.

2.) II faut recommencer tout les calculs si nous ajoutons un point.

Formule d'erreur du polynôme de collocation

Théorème:

Fonction d'erreur E:
$E(x) = f(x) - P_n(x)$

alors il existe ξ dans $I = [x_0, x_n]$ tel que

$$E(x) = \frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

Preuve:

$$W(t) = f(t) - P_n(t) - g(x) \prod_{i=0}^{n} (t - x_i)$$

Cette fonction possède n+2 zéros $\{ x, x_0, x_1 \ldots , x_n \}$
dans $I = [x_0, x_n]$;

W'(t) possède n+1 zéros
W''(t) possède n zéros
...
$W^{(n+1)}(t)$ possède 1 zéro (noté ξ)

Si nous calculons les dérivées successives, nous trouvons:
$W^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - 0 - (n+1)!\, g(x)$

donc il existe ξ dans $I = [x_0, x_n]$ tel que $\quad g(x) = \frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}$

Calcul pratique de l'erreur

Remarque: $\xi = \xi(x)$ dans :

$$E(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

1. Si f(x) est connue :
nous trouvons des bornes inférieures et supérieures
pour l'erreur E(x).

2. Si f(x) est inconnue :
nous ne pouvons pas estimer directement l'erreur
par la formule ci-dessus.

Remarques :

1. Lorsque la fonction tend vers une fonction polynomiale, l'erreur tend vers 0.

2. Lorsque nous extrapolons la valeur de la fonction en un point x_e, l'erreur sur $P_n(x_e)$ est grande en utilisant un polynôme de collocation.

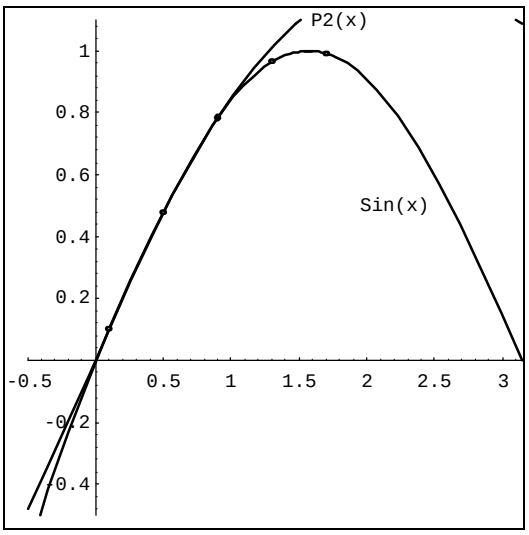
$$x_e \notin [x_0, x_n] \quad \textit{donc} \prod_{i=0}^{n} (x_e - x_i) \ \textit{est grand}$$

3. L'erreur est nulle pour les points de collocation.

Exemple: y = sinus(x)

Avec la table

X	Y
0.1	0.09983
0.5	0.47943
0.9	0.78333
1.3	0.96356
1.7	0.99166



Estimer l'erreur d'interpolation commise en x=0.8 en utilisant le polynôme de collocation $P_2(x)$ construit à partir des 3 premiers points.

$P_2(x) = -0.00689813 + 1.09094\ x - 0.236563\ x^2$

$P_2(0.8) = 0.714452$, or $\sin(0.8) = 0.717356$

En dérivant, nous avons y' = cos(x), y'' = - sin(x)
et y''' = - cos(x)

La formule d'erreur E(x) devient :

$$E(x) = \frac{-\cos(x)}{3!}(x-0.1)(x-0.5)(x-0.9)$$

x = 0.8 et $\xi \in [0.1, 0.9]$
donc nous avons

$0.218 \leq E(0.8) \leq 0.00348$

Cas où les abscisses sont équidistantes

$$x_{i+1} - x_i = h$$

Définition :

Différences descendantes

$$\Delta^0 f_i = f_i$$
$$\Delta^1 f_i = f_{i+1} - f_i$$
$$\Delta^2 f_i = \Delta^1 f_{i+1} - \Delta^1 f_i$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$\Delta^{n+1} f_i = \Delta(\Delta^n f_i) = \Delta^n f_{i+1} - \Delta^n f_i$$

Remarque :
L'ordre le plus élevé d'un tableau de n+1 valeurs est n.

Exemple la table des différences de f(x) = Sin(x)

x	$f(x)=\Delta^0 f$	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$
0.1	0.09983				
		0.37960			
0.5	0.47943		-0.07570		
		0.30390		-0.04797	
0.9	0.78333		-0.12367		0.01951
		0.18023		-0.02846	
1.3	0.96356		-0.15213		
		0.02810			
1.7	0.99166				

Formule de Newton Gregory descendante

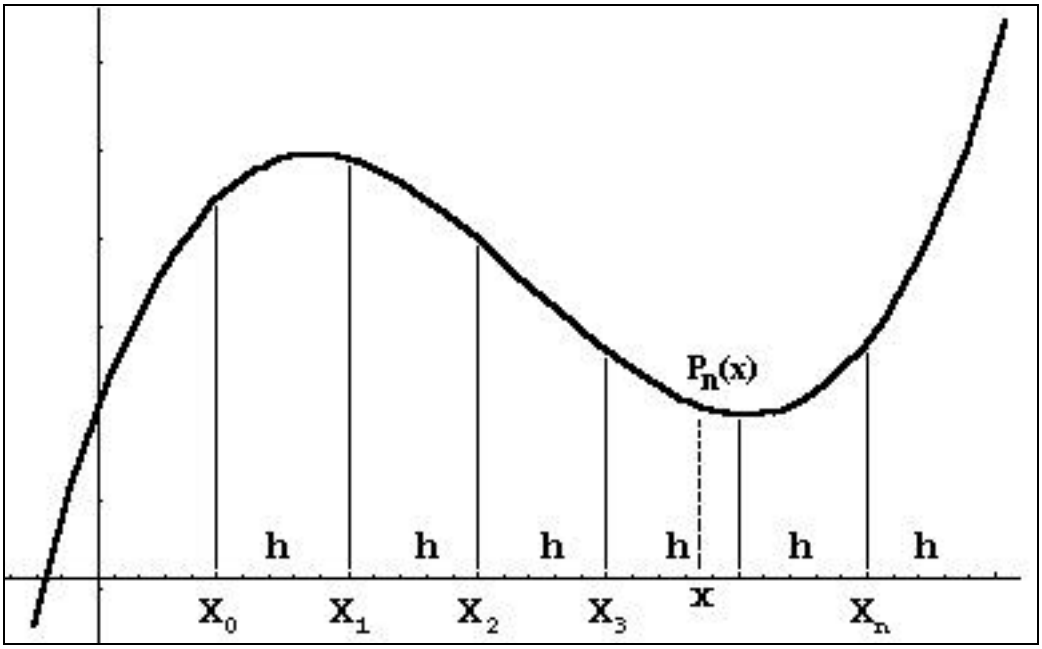
(cas où les abscisses sont équidistantes)

Soit (x_i,y_i) i = 0, ... ,n tels que $x_{i+1} - x_i = h$ pour i = 0, ..., n-1.

Alors

$$P_n(x) = f_0 + \frac{\Delta f_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 f_0}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1)$$

$$+ \text{K} \quad + \frac{\Delta^n f_0}{n!h^n}(x - x_0)\text{K}\ (x - x_{n-1})$$



$x_i = x_0 + i\ h$

Or nous pouvons définir s par : $x = x_0 + s\ h$

$x - x_i = (s - i)\ h$

donc

$$P_n(x) = f_0 + \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{\Delta^k f_0}{k!} \prod_{j=0}^{k-1}(s - j) \right)$$

x	f(x)=Δ^0f	Δf	Δ^2f
0.1	0.09983		
		0.37960	
0.5	0.47943		-0.07570
		0.30390	
0.9	0.78333		-0.12367
		0.18023	
1.3	0.96356		-0.15213
		0.02810	
1.7	0.99166		

Calculer Sin(0.8)
avec $x_0 = 0.1$ et un polynôme de degré 2.

$$P_2(x) = f_0 + \frac{\Delta^1 f_0}{1!} s + \frac{\Delta^2 f_0}{2!} s(s-1)$$

$$P_2(x) = 0.09983 + 0.37960\ s + \frac{-0.07570}{2!} s(s-1)$$

avec s = (x - 0.1) / (0.4)

Pour x = 0.8, nous avons s = 7/4

Donc $P_2(0.8) = 0.71445$

Notation :

$$\binom{s}{k} = \frac{s(s-1)(s-2)\,\mathrm{K}\ \ (s-k+1)}{k!}$$

Le polynôme de collocation est donc

$$P_n(x) = y_0 + \binom{s}{1}\Delta y_0 + \binom{s}{2}\Delta^2 y_0 + \binom{s}{3}\Delta^3 y_0 + \mathrm{K} + \binom{s}{n}\Delta^n y_0$$

Remarques :

1.Les points x_0 , x_1 , x_2 , ... , x_n doivent être ordonnés.
$x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n$
pour que la formule $x_i = x_0 + i\,h$ soit valide.

2.Si nous ajoutons un nouveau point (x_{n+1}, y_{n+1}), il doit être à droite de x_n, $x_{n+1} = x_n + h$

3.Le polynôme de collocation de degré n est :

$$P_n(x) = f_0 + \binom{s}{1}\Delta f_0 + \binom{s}{2}\Delta^2 f_0 + \text{K} + \binom{s}{n}\Delta^n f_0$$

Le polynôme $P_{n+1}(x)$ qui passe par les points précédents et le nouveau point est donné par :

$$P_{n+1}(x) = f_0 + \binom{s}{1}\Delta f_0 + \binom{s}{2}\Delta^2 f_0 + \text{K} + \binom{s}{n}\Delta^n f_0 + \binom{s}{n+1}\Delta^{n+1} f_0$$

donc

$$\boxed{P_{n+1}(x) = P_n(x) + \binom{s}{n+1}\Delta^{n+1} f_0}$$

Exemple : Sin(x) (suite)

Nous voulons calculer le polynôme de degré 3 qui passe par les 4 premiers points.

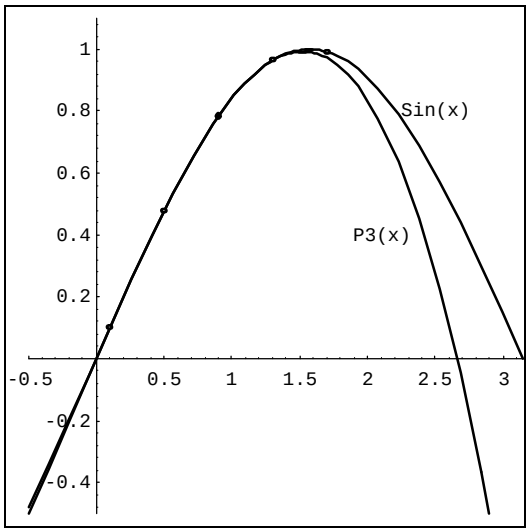
x	$f(x)=\Delta^0 f$	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$
0.1	0.09983				
		0.37960			
0.5	0.47943		-0.07570		
		0.30390		-0.04797	
0.9	0.78333		-0.12367		0.01951
		0.18023		-0.02846	
1.3	0.96356		-0.15213		
		0.02810			
1.7	0.99166				

Le polynôme de collocation de degré 2 qui passe par les 3 premiers points est :

$$P_2(x) = 0.09983 + 0.37960\ s + \frac{-0.07570}{2!} s(s-1)$$

avec s = 2.5 x - 0.25

$$P_3(x) = P_2(x) + \frac{-0.04797}{3!} s(s-1)(s-2)$$



$P_3(x) = - 0.00127664 + 1.01723\ x - 0.0491797\ x^2 - 0.124922\ x^3$

Erreur dans le cas de la formule de Newton Gregory

$$f(x) = P_n(x) + E(x) = \left\{ \sum_{k=0}^{n} \binom{s}{k} \Delta^k f_0 \right\} + \binom{s}{n+1} h^{n+1} f^{(n+1)}(\mathrm{x})$$

L'erreur E(x) peut être approchée par le prochain terme :

$$E(x) = \binom{s}{n+1} h^{n+1} f^{(n+1)}(\mathrm{x}) \approx \binom{s}{n+1} \Delta^{n+1} f_0$$

Remarques :

1. Le terme d'erreur E(x) est de l'ordre $O(h^{n+1})$.

2. Si f(x) est connue : nous trouvons des bornes inférieures et supérieures pour l'erreur E(x).

$$E(x) = \binom{s}{n+1} h^{n+1} f^{(n+1)}(\mathrm{x})$$

3. Si f(x) est inconnue : nous pouvons avoir une estimation de l'erreur d'interpolation par la formule :

$$E(x) = \binom{s}{n+1} \Delta^{n+1} f_0$$

Exemple :

L'approximation de l'erreur sur Sin(0.8) avec le polynôme quadratique avec $x_0 = 0.1$.

x	$f(x)=\Delta^0 f$	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$
0.1	0.09983				
		0.37960			
0.5	0.47943		-0.07570		
		0.30390		-0.04797	
0.9	0.78333		-0.12367		0.01951
		0.18023		-0.02846	
1.3	0.96356		-0.15213		
		0.02810			
1.7	0.99166				

1. Nous ne connaissons pas la fonction f(x)
Une approximation de l'erreur est donnée par :

$$E_2(x) = \binom{s}{3}\Delta^3 f_0 = \frac{s(s-1)(s-2)}{6}(-0.04797)$$

s = 2.5 0.8 -0.25 = 1.75

$\underline{E_2(0.8) = 0.002623}$

Remarque :
Sin(0.8) - $P_2(0.8)$ = 0.00290422

2. Nous connaissons la fonction f(x) = Sin(x)

L'erreur est donnée par :

$$E_2(x) = \binom{s}{3} h^3 f^{3}(\mathrm{x}) \quad \text{avec} \quad 0.1 \le \xi \le 0.9$$

$$f^3(x) = - \mathrm{Cos}(x)$$

$$E_2(0.8) = -\binom{s}{3} h^3 Cos(\xi)$$

$$0.62161 = Cos(0.9) \le Cos(\mathrm{x}) \le Cos(0.1) = 0.995004$$

$$0.4^3 * 0.62161 \le h^3 Cos(\mathrm{x}) \le 0.4^3 * 0.995004$$

$$-0.4^3 * 0.62161 \ge -h^3 Cos(\mathrm{x}) \ge -0.4^3 * 0.995004$$

or x = 0.8 donc s = (0.8 - 0.1) / 0.4

$$\binom{s}{3} = \frac{1}{6} s(s-1)(s-2) = \frac{1}{6}\frac{7}{4}\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{7}{128}$$

$$\frac{7}{128} 0.4^3 * 0.62161 \le -\binom{s}{3} h^3 Cos(\xi) \le \frac{7}{128} 0.4^3 * 0.995004$$

$$\underline{0.00217564 \le E_2(0.8) \le 0.00348251}$$

Avantages de la formules de Newton Gregory

1. Passage facile d'un polynôme de degré n à n+1.

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + \binom{s}{n+1}\Delta^{n+1} f_0$$

2. La multiplication imbriquée minimise le nombre des opérations.

$$P_2(x) = 0.09983 + 0.37960\ s + \frac{-0.07570}{2!}s(s-1)$$

$$= 0.09983 + s\left(0.37960 - \frac{0.07570}{2}(s-1)\right)$$

3. Approximation simple de l'erreur commise.

Inconvénients

Intervalles égaux et points ordonnés

Différences divisées

Définitions :

Soit (x_i , y_i) i = 0, 1, ... , n
avec des intervalles irréguliers :

Les premières différences divisées sont :

$$\Delta\left[x_i, x_j\right] = \frac{y_j - y_i}{x_j - x_i} \quad ou\ 0 \le i, j \le n, i \ne j$$

Les différences divisées du deuxième ordre sont :

$$\Delta^2\left[x_i, x_j, x_k\right] = \frac{\Delta\left[x_j, x_k\right] - \Delta\left[x_i, x_j\right]}{x_k - x_i}$$

Récursivement, les différences divisées du n^{ième} ordre sont

$$\Delta^n\left[x_0, x_1, \mathrm{K}\ , x_n\right] = \frac{\Delta^{n-1}\left[x_1, x_2, \mathrm{K}\ , x_n\right] - \Delta^{n-1}\left[x_0, x_1, \mathrm{K}\ , x_{n-1}\right]}{x_n - x_0}$$

Nous avons donc une table des différences divisées.

Exemple :

x_0	y_0			
		$\Delta[x_0,x_1]$		
x_1	y_1		$\Delta^2[x_0,x_1,x_2]$	
		$\Delta[x_1,x_2]$		$\Delta^3[x_0,x_1,x_2,x_3]$
x_2	y_2		$\Delta^2[x_1,x_2,x_3]$	
		$\Delta[x_2,x_3]$		
x_3	y_3			

Formule de Newton pour les différences divisées

(cas où les abscisses sont quelconques)

Soit (x_i, y_i) i = 0, ... ,n
Alors

$$P_n(x) = f_0 + \Delta[x_0, x_1](x - x_0) + \text{K} + \Delta^n[x_0, x_1, \text{K}\ , x_n](x - x_0)\text{K}\ (x - x_{n-1})$$

vérifie les n+1 conditions de collocations.

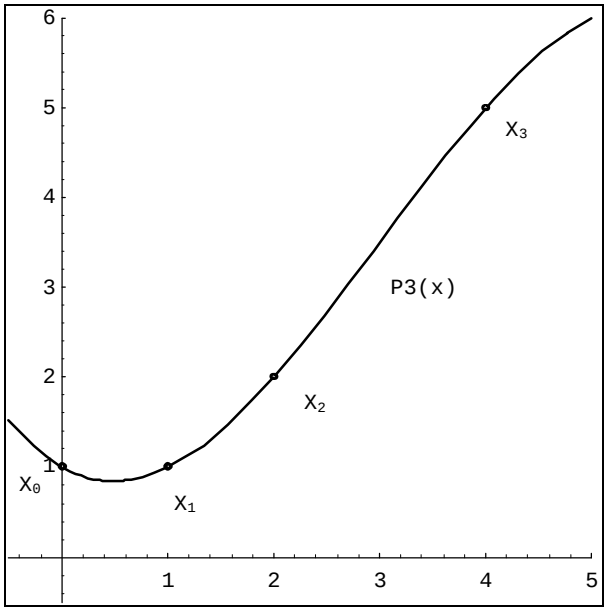
Exemple :
Calculons le Polynôme de degré 3 passant par :

x_0=0	y_0=1			
		0		
x_1=1	y_1=1		1/2	
		1		-1/12
x_2=2	y_2=2		1/6	
		3/2		
x_3=4	y_3=5			

$$P_3(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

$$P_3(x) = 1 + 0 + \frac{1}{2}(x - 0)(x - 1) - \frac{1}{12}(x - 0)(x - 1)(x - 2)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{12}(-x^3 + 9x^2 - 8x + 12)$$



Calculons le Polynôme de degré 4 passant par les 4 points précédents et ($x_4 = 3, y_4 = 5$) :

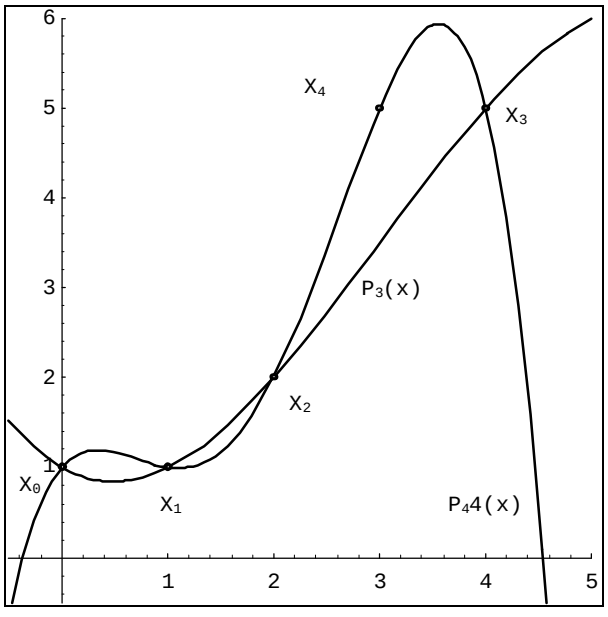
$$P_4(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + a_4(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

$$\underline{P_4(x) = P_3(x) + a_4(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}$$

donc

$$P_4(x) = P_3(x) - \frac{1}{4}x(x-1)(x-2)(x-4)$$

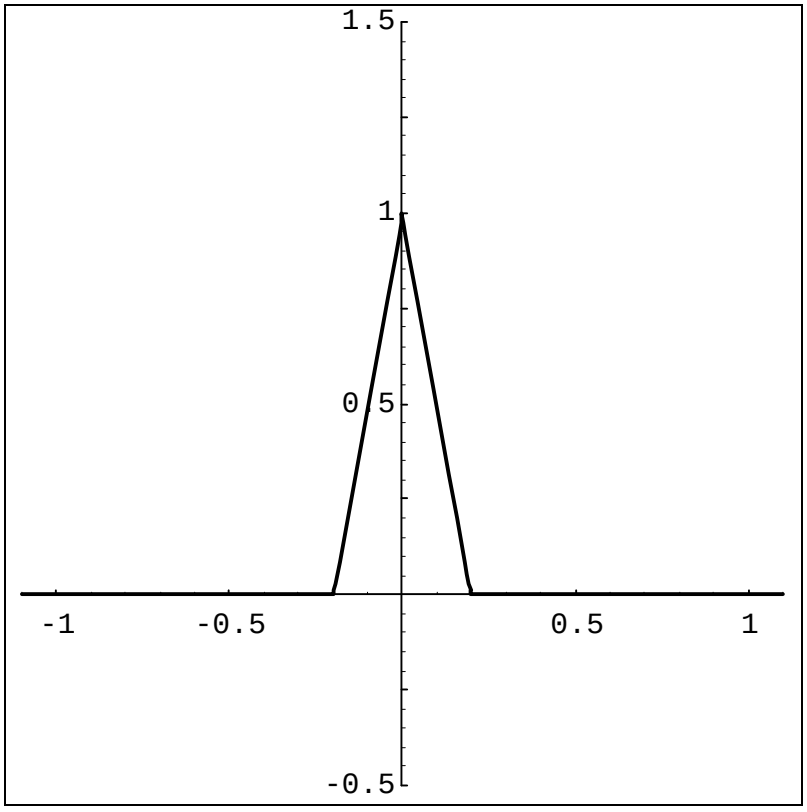
$$P_4(x) = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{11}{4}x^2 + \frac{4}{3}x + 1$$

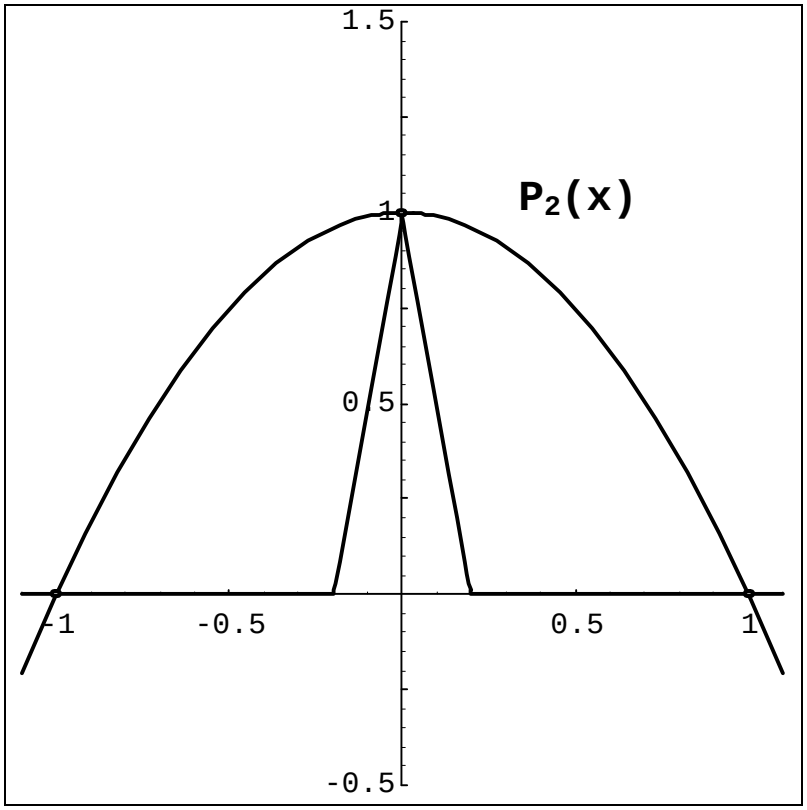


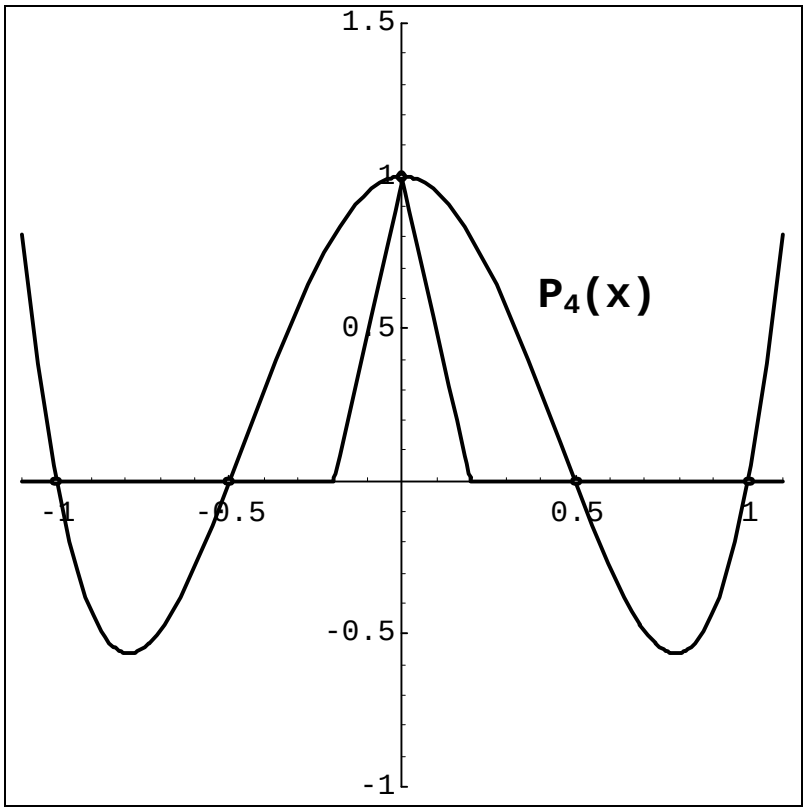
Instabilité des polynômes d'interpolation d'ordre élevé

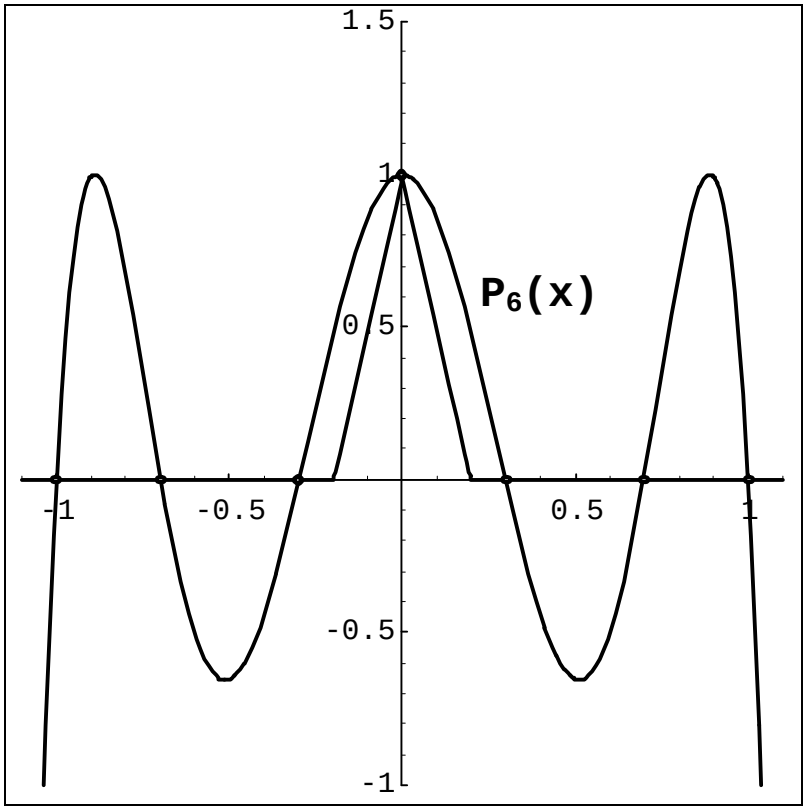
Considérons la fonction définie par :

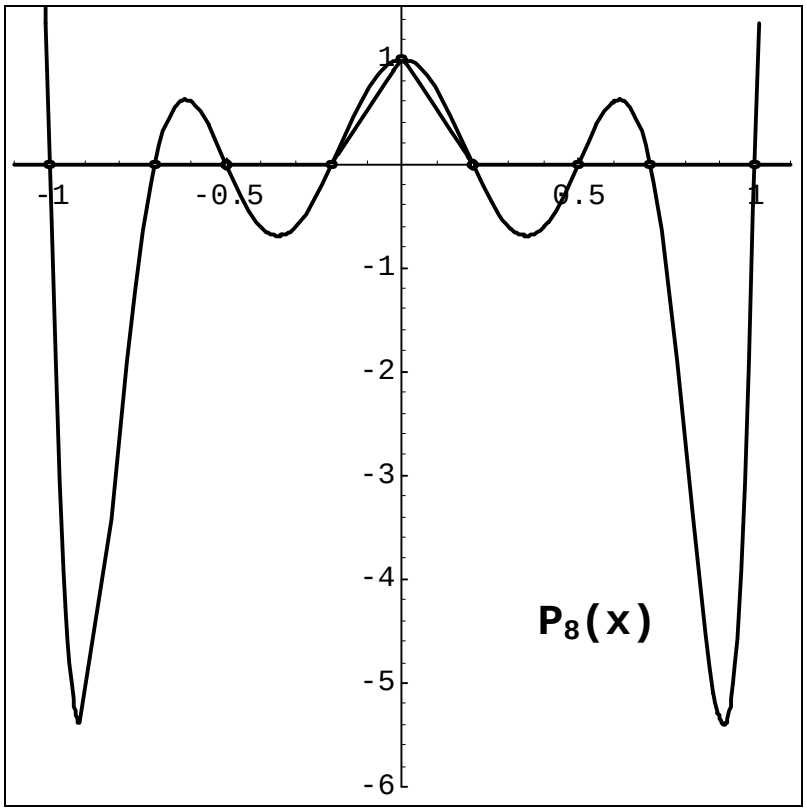
$$
\begin{array}{ll}
f(x) = 0 & -1.2 \le x \le -0.2 \\
f(x) = 1 - |\, 5\, x \,| & -0.2 \le x \le 0.2 \\
f(x) = 0 & 0.2 \le x \le 1.0
\end{array}
$$




1.5
1
0.5
-0.5
-1
-0.5
0.5
1
P2(x)


1.5
1
0.5
-0.5
-1
-1
-0.5
0.5
1
P4(x)


1.5
1
0.5
-0.5
-1
-1
-0.5
0.5
1
P6(x)


1
-1
-0.5
0.5
1
-1
-2
-3
-4
-5
-6
P8(x)

Conclusion sur les polynôme de collocation

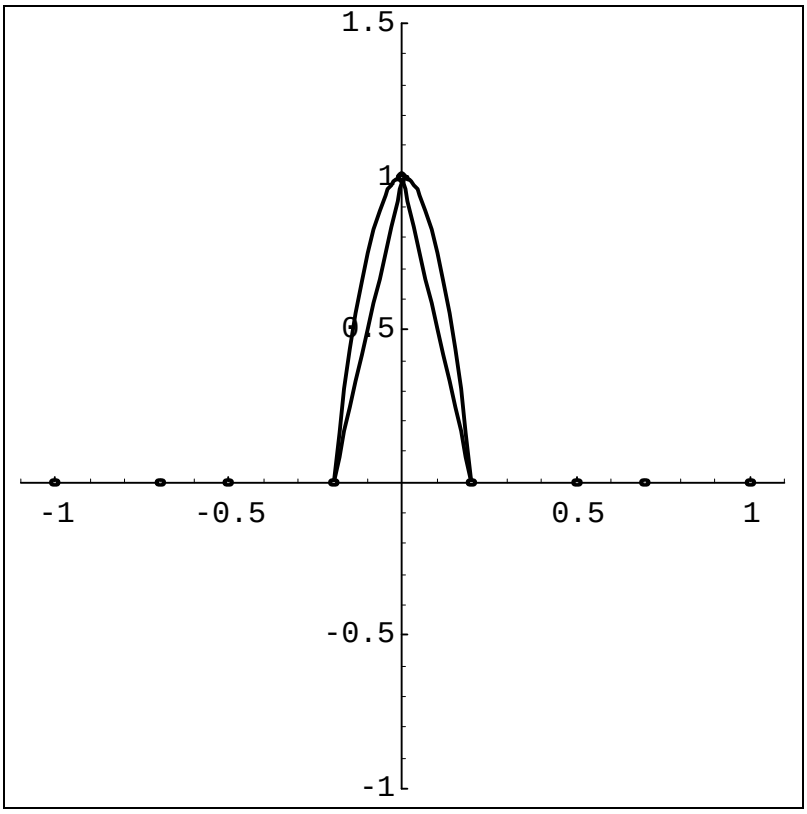
1. Degré assez grand mais pas trop.

2. Intervalle centré autour du point d'interpolation.

3. Il vaut mieux utiliser des polynômes de collocation de degré moins grand sur différents sous intervalles.

Exemple :

f(x) est interpolée par 3 polynômes de degré 2.



Interpolation par les splines cubiques

Définition :

Spline

Ruban flexible passant par les points (**noeuds**)

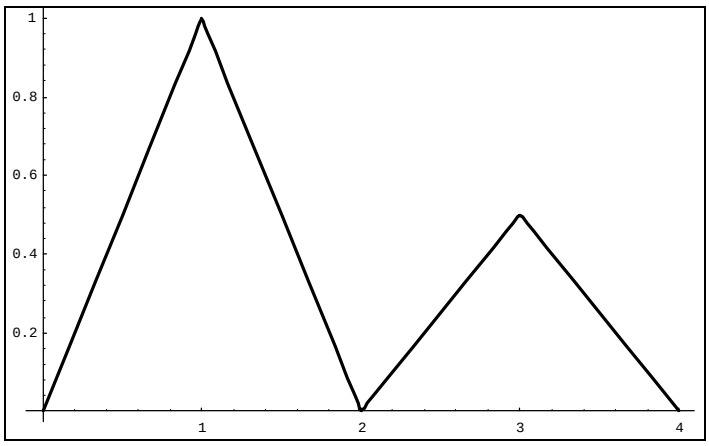
Généralisation mathématique
(Schoenberg, 1946)

Approximation **par morceaux** telle que :

1. Chaque courbe passe par les extrémités de chaque sous intervalle.

2. Le raccord entre ces courbes est le plus doux possible.

Exemple:

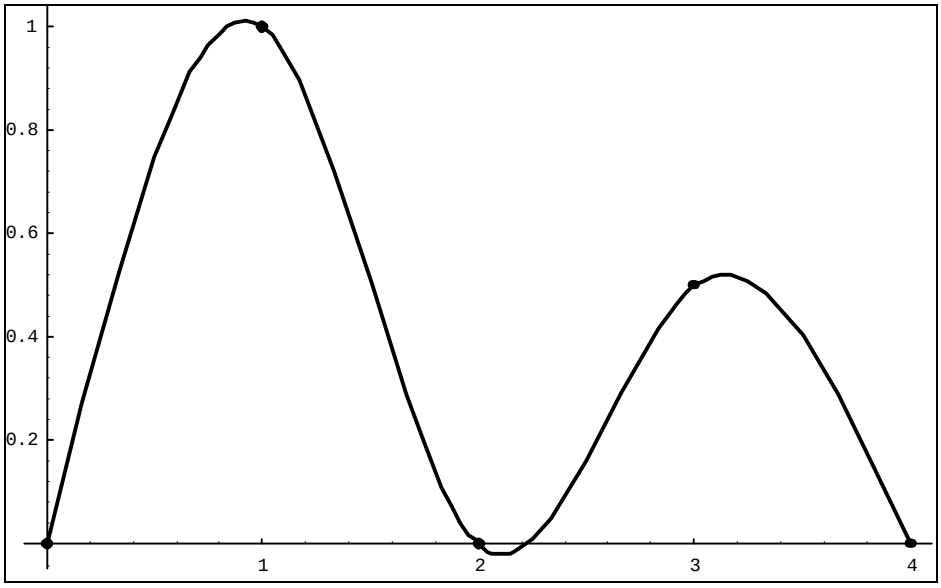


Spline cubique

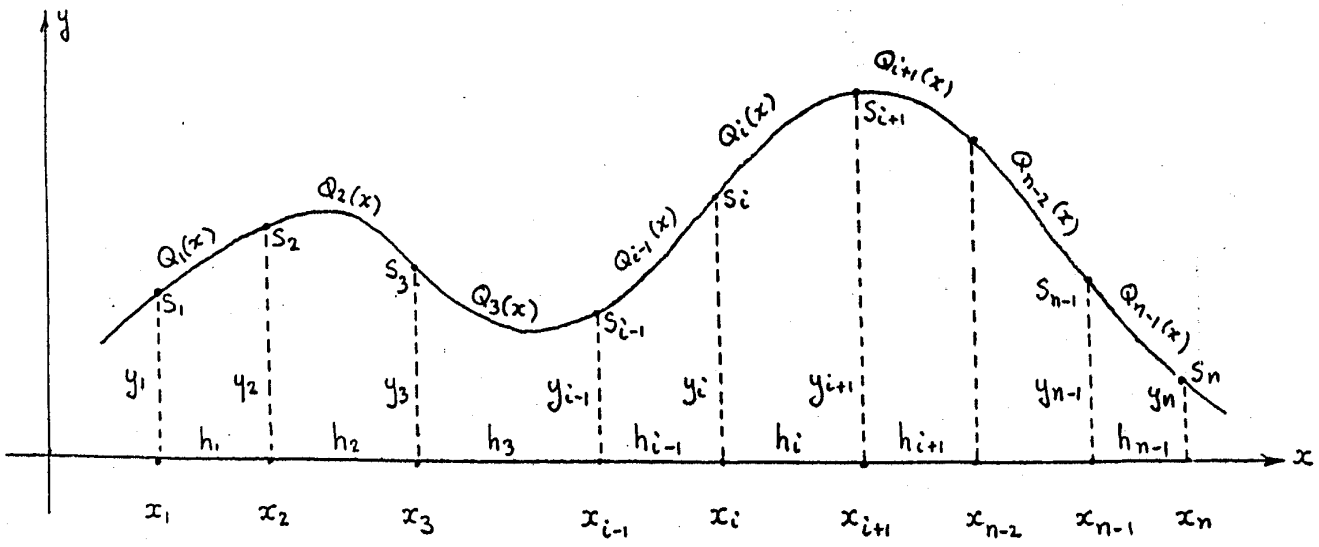
permet un raccord 2 fois différentiable :

Continuité de f, f’ et f’’.

Exemple:



Interpolation par les splines cubiques



$$Q_1(x) = a_1(x - x_1)^3 + b_1(x - x_1)^2 + c_1(x - x_1) + d_1$$
$$Q_2(x) = a_2(x - x_2)^3 + b_2(x - x_2)^2 + c_2(x - x_2) + d_2$$
$$\dots$$
$$Q_i(x) = a_i(x - x_i)^3 + b_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i) + d_i$$
$$\dots$$
$$Q_{n-1}(x) = a_{n-1}(x - x_{n-1})^3 + b_{n-1}(x - x_{n-1})^2 + c_{n-1}(x - x_{n-1}) + d_{n-1}$$

Trouver a_i, b_i, c_i, d_i pour i = 1,2, ... , n-1.

Condition 1 : Continuité des fonctions.

$$y_1 = Q_1(x_1)$$
$$y_2 = Q_1(x_2) = Q_2(x_2)$$
$$\ldots$$
$$y_i = Q_{i-1}(x_i) = Q_i(x_i)$$
$$\ldots$$
$$y_{n-1} = Q_{n-2}(x_{n-1}) = Q_{n-1}(x_{n-1})$$
$$y_n = Q_{n-1}(x_n)$$

Condition 2 : Continuité des dérivées premières.

$$Q_1'(x_1)$$
$$Q_1'(x_2) = Q_2'(x_2)$$
$$\ldots$$
$$Q_{i-1}'(x_i) = Q_i'(x_i)$$
$$\ldots$$
$$Q_{n-2}'(x_{n-1}) = Q_{n-1}'(x_{n-1})$$
$$Q_{n-1}'(x_n)$$

Condition 3 : Continuité des dérivées secondes.

$$Q_1''(x_1) = S_1$$
$$Q_1''(x_2) = Q_2''(x_2) = S_2$$
$$\ldots$$
$$Q_{i-1}''(x_i) = Q_i''(x_i) = S_i$$
$$\ldots$$
$$Q_{n-2}''(x_{n-1}) = Q_{n-1}''(x_{n-1}) = S_{n-1}$$
$$Q_{n-1}''(x_n) = S_n$$

Condition 3 : Continuité des dérivées secondes.

a. i =1

$$S_1 = Q_1''(x_1)$$
$$Q_1(x) = a_1(x - x_1)^3 + b_1(x - x_1)^2 + c_1(x - x_1) + d_1$$
$$Q_1''(x) = 6a_1(x - x_1) + 2b_1$$

$$\therefore S_1 = 2b_1$$
$$\therefore b_1 = \frac{S_1}{2} \qquad \text{pour i =1} \qquad (1)$$

b. i = 2, ... , n-1

$$S_i = Q_{i-1}''(x_i) = Q_i''(x_i)$$
$$Q_i(x) = a_i(x - x_i)^3 + b_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i) + d_i$$
$$Q_i''(x) = 6a_i(x - x_i) + 2b_i$$

$$\therefore S_i = Q_i''(x) = 2b_i$$
$$\therefore b_i = \frac{S_i}{2} \qquad \text{pour i =2, ... , n-1} \qquad (2)$$

En combinant (1) et (2), nous obtenons :

$$\therefore b_i = \frac{S_i}{2} \qquad \text{pour i =1, ... , n-1} \qquad (3)$$

Si on trouve S_1, S_2, ... , S_{n-1}, nous aurons b_1, b_2, ... , b_{n-1}

$$Q_{i-1}(x) = a_{i-1}(x - x_{i-1})^3 + b_{i-1}(x - x_{i-1})^2 + c_{i-1}(x - x_{i-1}) + d_{i-1}$$
$$Q''_{i-1}(x) = 6a_{i-1}(x - x_{i-1}) + 2b_{i-1}$$
$$\therefore S_i = Q''_{i-1}(x_i) = Q''_i(x_i)$$
$$S_i = 6a_{i-1}h_{i-1} + 2b_{i-1} \quad \text{or} \quad 2b_{i-1} = S_{i-1}$$

$$a_{i-1} = \frac{S_i - S_{i-1}}{6h_{i-1}} \qquad \text{pour i =2, ... , n-1} \qquad (4)$$

$$\therefore S_1, S_2, \text{K}\ , S_{n-1} \Rightarrow a_1, a_2, \text{K}\ , a_{n-2}$$

c. i = n

$$Q_{n-1}(x) = a_{n-1}(x - x_{n-1})^3 + b_{n-1}(x - x_{n-1})^2 + c_{n-1}(x - x_{n-1}) + d_{n-1}$$

$$Q''_{n-1}(x) = 6a_{n-1}(x - x_{n-1}) + 2b_{n-1}$$
$$S_n = 6a_{n-1}h_{n-1} + 2b_{n-1} = 6a_{n-1}h_{n-1} + S_{n-1}$$

$$\therefore a_{n-1} = \frac{S_n - S_{n-1}}{6h_{n-1}} \qquad \text{pour i =n} \qquad (5)$$

En combinant (4) et (5), nous obtenons :

$$a_{i-1} = \frac{S_i - S_{i-1}}{6h_{i-1}} \qquad \text{pour i =2, ... , n-1, n} \qquad (6)$$

ou alors

$$a_i = \frac{S_{i+1} - S_i}{6h_i} \qquad \text{pour i =1, 2, ... , n-1} \qquad (7)$$

$$\therefore S_1, S_2, \text{K}\ , S_n \Rightarrow a_1, a_2, \text{K}\ , a_{n-1}$$

Condition 1 : Continuité des fonctions.

a. i =1

$$y_1 = Q_1(x_1)$$
$$Q_1(x) = a_1(x - x_1)^3 + b_1(x - x_1)^2 + c_1(x - x_1) + d_1$$

$$\therefore d_1 = y_1 \qquad \text{pour i =1} \qquad (8)$$

b. i = 2, ... , n-1

$$y_i = Q_{i-1}(x_i) = Q_i(x_i)$$
$$Q_i(x) = a_i(x - x_i)^3 + b_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i) + d_i$$

$$\therefore d_i = y_i \qquad \text{pour i =2, ... , n-1} \qquad (9)$$

En combinant (8) et (9), nous obtenons :

$$\therefore d_i = y_i \qquad \text{pour i =1, 2, ... , n-1} \qquad (10)$$

$$\therefore y_1, y_2, \text{K}\ , y_{n-1} \Rightarrow d_1, d_2, \text{K}\ , d_{n-1}$$

de même:

$$Q_{i-1}(x) = a_{i-1}(x - x_{i-1})^3 + b_{i-1}(x - x_{i-1})^2 + c_{i-1}(x - x_{i-1}) + d_{i-1}$$

$$\therefore y_i = a_{i-1}h_{i-1}^3 + b_{i-1}h_{i-1}^2 + c_{i-1}h_{i-1} + d_{i-1}$$
$$\text{pour i =2, ... , n-1} \qquad (11)$$

c. i = n

$$y_n = Q_{n-1}(x_n)$$

$$Q_{n-1}(x) = a_{n-1}(x - x_{n-1})^3 + b_{n-1}(x - x_{n-1})^2 + c_{n-1}(x - x_{n-1}) + d_{n-1}$$

$$\therefore y_n = a_{n-1}h_{n-1}^3 + b_{n-1}h_{n-1}^2 + c_{n-1}h_{n-1} + d_{n-1} \qquad (12)$$

En combinant (11) et (12), nous obtenons :

$$\therefore y_i = a_{i-1}h_{i-1}^3 + b_{i-1}h_{i-1}^2 + c_{i-1}h_{i-1} + d_{i-1} \quad \text{pour i =2, ... , n} \qquad (13)$$

ou bien

$$\therefore y_{i+1} = a_i h_i^3 + b_i h_i^2 + c_i h_i + d_i \quad \text{pour i =1, ... , n-1} \qquad (14)$$

dans (14) substituons a_i, b_i d_i par (3), (7), (10) et isolons C_i:

$$c_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{2h_i S_i + h_i S_{i+1}}{6} \quad \text{pour i =1, ... , n-1} \qquad (15)$$

$$\therefore S_1, S_2, \text{K}\ , S_n \Rightarrow c_1, c_2, \text{K}\ , c_{n-1}$$

Condition 2 : Continuité des dérivées premières.
Il ne reste donc qu'à trouver S_1, S_2, ... , S_n

a. i =1

$Q_1'(x_1)$ $(= y_1'$ *notation*)

$$Q_1(x) = a_1(x - x_1)^3 + b_1(x - x_1)^2 + c_1(x - x_1) + d_1$$

$$Q_1'(x) = 3a_1(x - x_1)^2 + 2b_1(x - x_1)^1 + c_1$$

$$\therefore\ y_1' = c_1 \qquad \text{pour i =1} \qquad (16)$$

b. i = 2, ... , n-1

$$y_i' = Q_{i-1}'(x_i) = Q_i'(x_i)$$
$$Q_i'(x) = 3a_i(x - x_i)^2 + 2b_i(x - x_i)^1 + c_i$$

$$\therefore\ y_i' = c_i \qquad \text{pour i = 2, ... , n-1} \qquad (17)$$

En combinant (16) et (17), nous obtenons :

$$\therefore\ y_i' = c_i \qquad \text{pour i = 1, ... , n-1} \qquad (18)$$

$$\therefore S_1, S_2, \text{K}\ , S_n \Rightarrow c_1, c_2, \text{K}\ , c_{n-1} \Rightarrow y_1', y_2', \text{K}\ , y_{n-1}'$$

de même: $Q_{i-1}'(x) = 3a_{i-1}(x - x_{i-1})^2 + 2b_{i-1}(x - x_{i-1}) + c_{i-1}$

$$\therefore y_i'(x) = 3a_{i-1}h_{i-1}^2 + 2b_{i-1}h_{i-1}^2 + c_{i-1} \text{ pour i = 2, ... , n-1} \qquad (19)$$

c. i = n

$$y'_n = Q'_{n-1}(x_n)$$

$$Q_{n-1}(x) = a_{n-1}(x - x_{n-1})^3 + b_{n-1}(x - x_{n-1})^2 + c_{n-1}(x - x_{n-1}) + d_{n-1}$$

$$Q'_{n-1}(x) = 3a_{n-1}(x - x_{n-1})^2 + 2b_{n-1}(x - x_{n-1}) + c_{n-1}$$

$$Q'_{n-1}(x) = 3a_{n-1}h_{n-1}^2 + 2b_{n-1}h_{n-1} + c_{n-1} \quad \text{pour i = n} \qquad (20)$$

En combinant (19) et (20), nous obtenons :

$$y'_i(x) = 3a_{i-1}h_{i-1}^2 + 2b_{i-1}h_{i-1} + c_{n-1} \quad \text{pour i = 2, ... , n} \qquad (21)$$

En égalant (18) et (21) pour le domaine commun i = 2, ... , n-1, nous obtenons:

$$c_i = 3a_{i-1}h_{i-1}^2 + 2b_{i-1}h_{i-1} + c_{i-1} \quad \text{pour i = 2, ... , n-1} \qquad (22)$$

Dans (22), utilisons les formules (3), (7) et (15):

$$\therefore b_i = \frac{S_i}{2} \qquad \text{pour i =1, ... , n-1} \qquad (3)$$

$$a_i = \frac{S_{i+1} - S_i}{6h_i} \qquad \text{pour i =1, 2, ... , n-1} \qquad (7)$$

$$c_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{2h_i S_i + h_i S_{i+1}}{6} \qquad \text{pour i =1, ... , n-1} \qquad (15)$$

pour i = 2, ... , n-1, nous obtenons:

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{2h_i S_i + h_i S_{i+1}}{6} = 3(\frac{S_i - S_{i-1}}{6h_{i-1}})h_{i-1}^2$$
$$+2(\frac{S_{i-1}}{2})h_{i-1}$$
$$+\frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}}$$
$$-\frac{2h_{i-1}S_{i-1} + h_{i-1}S_i}{6}$$

$$\therefore \boxed{h_{i-1}S_{i-1} + (2h_{i-1} + 2h_i)S_i + h_i S_{i+1} = 6\left[\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}}\right]}$$

Pour i = 2, ... , n-1 donc (n-2) équations à n inconnues S_1, ... , S_n

Nous avons un système de (n-2) équations
à n inconnues S_1, ... , S_n à résoudre.

$$i = 2 \quad h_1 S_1 + 2(h_1 + h_2) S_2 + h_2 S_3 = 6\left[\frac{y_3 - y_2}{h_2} - \frac{y_2 - y_1}{h_1}\right]$$

$$i = 3 \quad h_2 S_2 + 2(h_2 + h_3) S_3 + h_3 S_4 = 6\left[\frac{y_4 - y_3}{h_3} - \frac{y_3 - y_2}{h_2}\right]$$

$$i = 4 \quad h_3 S_3 + 2(h_3 + h_4) S_4 + h_4 S_5 = 6\left[\frac{y_5 - y_4}{h_4} - \frac{y_4 - y_3}{h_3}\right]$$

$$i = n-1 \quad h_{n-2} S_{n-2} + 2(h_{n-2} + h_{n-1}) S_{n-1} + h_{n-1} S_n = 6\left[\frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{h_{n-2}}\right]$$

Nous réduisons ce système à (n-2) inconnues en imposant des valeurs
(Conditions frontières) pour S_1 et S_n aux extrémités de l'intervalle:

$$\begin{bmatrix} x & x & & & & & & \\ x & x & x & & & & 0 & \\ & x & x & x & & & & \\ & & x & x & x & & & \\ & & & O & O & O & & \\ & & & & O & O & O & \\ & 0 & & & & x & x & x \\ & & & & & & x & x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ M \\ M \\ M \\ S_{n-2} \\ S_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ M \\ M \\ M \\ z_{n-2} \\ z_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow S_1, S_2, \text{K}\ , S_n \Rightarrow a_i, b_i, c_i, d_i \Rightarrow Q_i(x)$$

Les coefficients de chaque polynôme de degré 3

$$Q_1(x) = a_1(x - x_1)^3 + b_1(x - x_1)^2 + c_1(x - x_1) + d_1$$
$$Q_2(x) = a_2(x - x_2)^3 + b_2(x - x_2)^2 + c_2(x - x_2) + d_2$$
$$\ldots$$
$$Q_i(x) = a_i(x - x_i)^3 + b_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i) + d_i$$
$$\ldots$$
$$Q_{n-1}(x) = a_{n-1}(x - x_{n-1})^3 + b_{n-1}(x - x_{n-1})^2 + c_{n-1}(x - x_{n-1}) + d_{n-1}$$

sont donnés par :

$$a_i = \frac{\left(S_{i+1} - S_i\right)}{6h_i}$$
$$b_i = \frac{S_i}{2}$$
$$c_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{\left(2S_i + S_{i+1}\right)h_i}{6}$$
$$d_i = y_i$$

Splines cubiques : Conditions frontières

1. Extrémités libres (free boundary conditions) **Type 1**

Dans les splines dites **Naturelles** (natural spline), nous ajoutons les 2 équations :

$$\mathbf{S_1 = 0}$$
$$\mathbf{S_n = 0}$$

La spline a un comportement parabolique linéaire aux bouts. (près de extrémités)

La première équation devient :

$$2(h_1 + h_2)S_2 + h_2 S_3 = 6\left[\frac{y_3 - y_2}{h_2} - \frac{y_2 - y_1}{h_1}\right]$$

La dernière équation devient :

$$h_{n-2}S_{n-2} + 2(h_{n-2} + h_{n-1})S_{n-1} = 6\left[\frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{h_{n-2}}\right]$$

Exemple :

Faire passer une spline cubique naturelle par les points suivants :

i	*1*	*2*	*3*	*4*
x_i	1	2	3	4
$f(x_i)$	4	-2	3	1

Spline naturelle : $S_1 = 0$ et $S_4 = 0$

$$\begin{bmatrix} 2(h_1+h_2) & h_2 \\ h_2 & 2(h_2+h_3) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6\left[\frac{y_3-y_2}{h_2} - \frac{y_2-y_1}{h_1}\right] \\ 6\left[\frac{y_4-y_3}{h_3} - \frac{y_3-y_2}{h_2}\right] \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6[(3+2)-(-2-4)] \\ 6[(1-3)-(3+2)] \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 66 \\ -42 \end{bmatrix}$$

Nous avons donc la solution :

$S_1 = 0$, $S_2 = 20.4$, $S_3 = -15.6$ et $S_4 = 0$

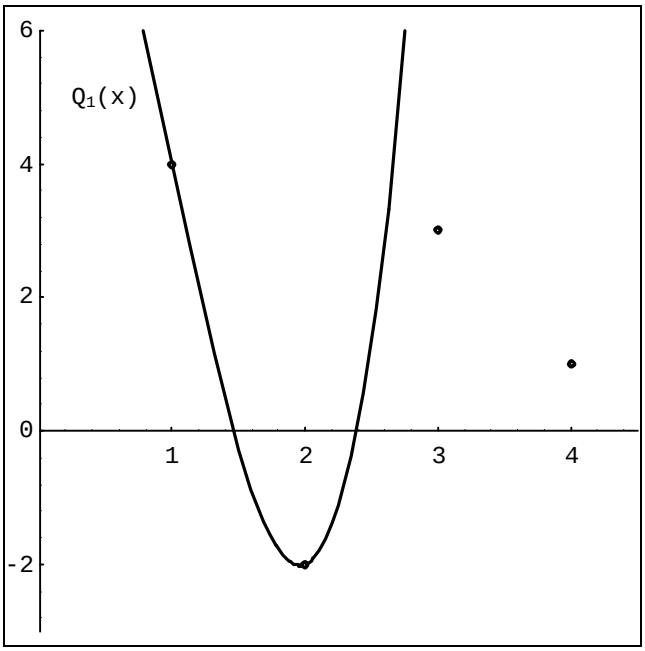
$$a_1 = \frac{\left(S_2 - S_1\right)}{6h_1}, b_1 = \frac{S_1}{2},$$

$$c_1 = \frac{y_2 - y_1}{h_1} - \frac{\left(2S_1 + S_2\right)h_1}{6},$$

$$d_1 = y_1$$

$$a_1 = 3.4, b_1 = 0, c_1 = -9.4, d_1 = 4$$

$$Q_1(x) = 3.4(x-1)^3 - 9.4(x-1) + 4$$



$$a_2 = \frac{\left(S_3 - S_2\right)}{6h_2}, b_2 = \frac{S_2}{2},$$

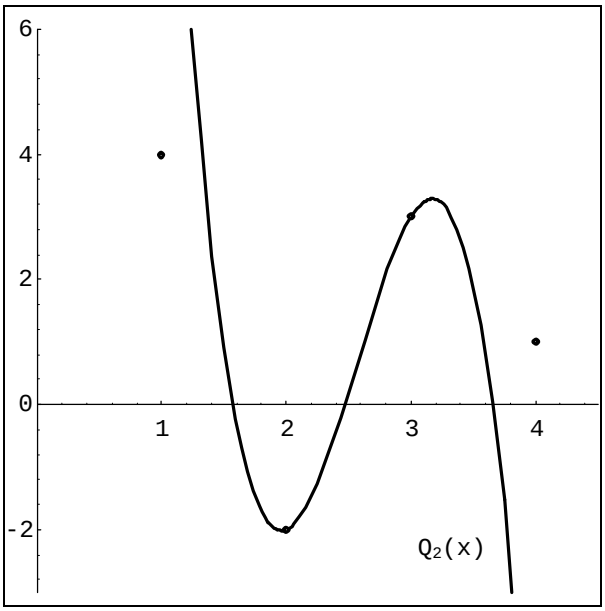
$$c_2 = \frac{y_3 - y_2}{h_2} - \frac{\left(2S_2 + S_3\right)h_2}{6},$$

$$d_2 = y_2$$

$$a_2 = -6, b_2 = 10.2, c_2 = 0.8,$$

$$d_2 = -2$$

$$Q_2(x) = -6(x-2)^3 + 10.2(x-2)^2 + 0.8(x-2) - 2$$



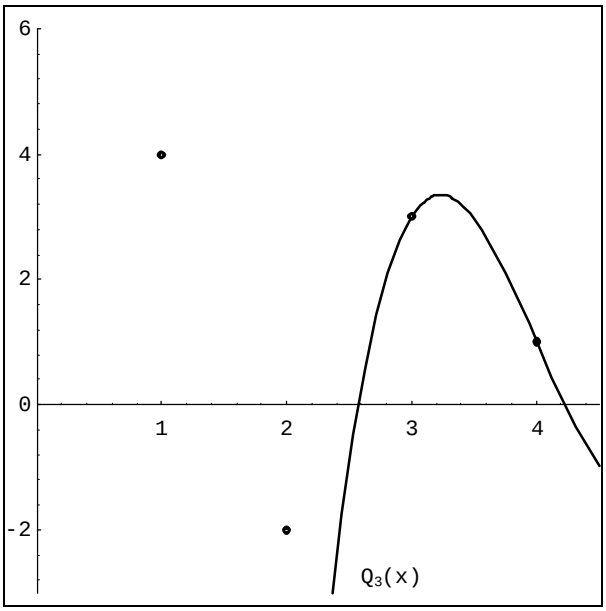
$$a_3 = \frac{\left(S_4 - S_3\right)}{6h_3}, b_3 = \frac{S_3}{2},$$

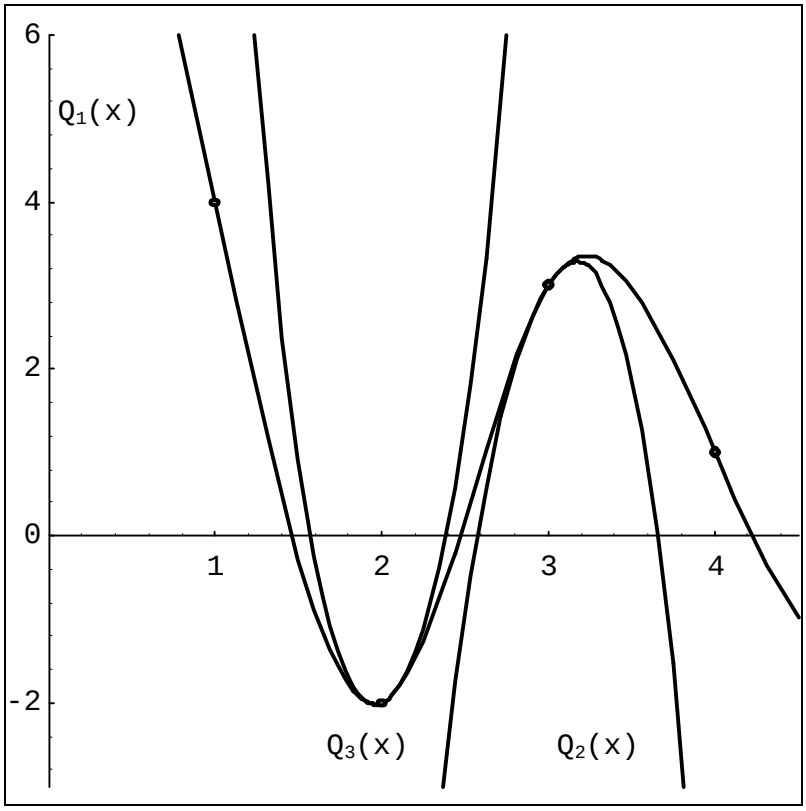
$$c_3 = \frac{y_4 - y_3}{h_3} - \frac{\left(2S_3 + S_4\right)h_3}{6},$$

$$d_3 = y_3$$

$$a_3 = 2.6, b_3 = -7.8, c_3 = 3.2, d_3 = 3$$

$$Q_3(x) = 2.6(x-3)^3 - 7.8(x-3)^2 + 3.2(x-3) + 3$$





2. nous ajoutons les 2 conditions : **Type 2**

$$\mathbf{S_1 = S_2}$$
$$\mathbf{S_n = S_{n-1}}$$

La spline a un comportement parabolique aux bouts.
(près des extrémités)

La première équation devient :

$$(3h_1 + 2h_2)S_2 + h_2 S_3 = 6\left[\frac{y_3 - y_2}{h_2} - \frac{y_2 - y_1}{h_1}\right]$$

La dernière équation devient :

$$h_{n-2}S_{n-2} + (2h_{n-2} + 3h_{n-1})S_{n-1} = 6\left[\frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{h_{n-2}}\right]$$

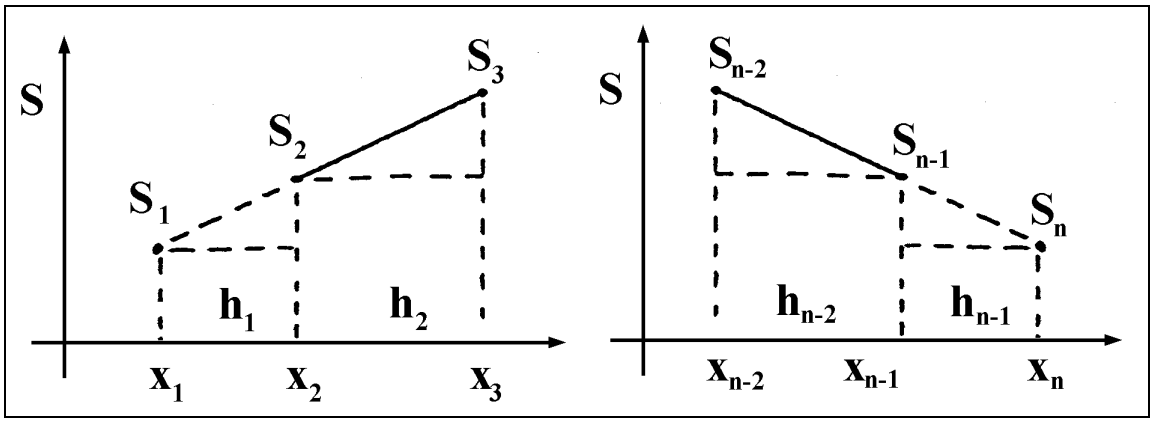
Exemple (suite)

Utilisons des conditions frontières de type 2.

$S_1 = S_2 = 15.5$
$S_3 = S_4 = -11.5$

3. nous ajoutons les 2 conditions : **Type 3**

S_1 = Extrapolation linéaire de S_2 et S_3
S_n = Extrapolation linéaire de S_{n-2} et S_{n-1}



$$\frac{S_3 - S_2}{h_2} = \frac{S_2 - S_1}{h_1} \qquad \frac{S_{n-2} - S_{n-1}}{h_{n-2}} = \frac{S_{n-1} - S_n}{h_{n-1}}$$

$$S_1 = S_2\left(\frac{h_1 + h_2}{h_2}\right) - \frac{h_1}{h_2} S_3 \qquad S_n = -\frac{h_{n-1}}{h_{n-2}} S_{n-2} + \left(\frac{h_{n-2} + h_{n-1}}{h_{n-2}}\right) S_{n-1}$$

La première équation devient :

$$S_2\left(\frac{(h_1 + h_2)(h_1 + 2h_2)}{h_2}\right) + S_3 \frac{(h_2^2 - h_1^2)}{h_2} = 6\left[\frac{y_3 - y_2}{h_2} - \frac{y_2 - y_1}{h_1}\right]$$

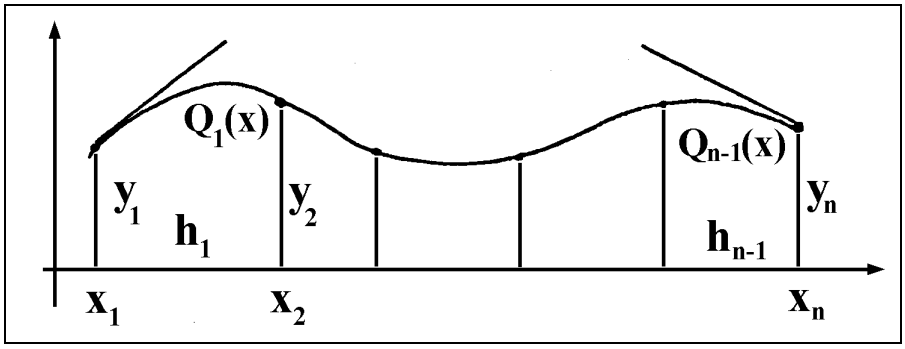
La dernière équation devient :

$$S_{n-2} \frac{(h_{n-2}^2 - h_{n-1}^2)}{h_{n-2}} + S_{n-1}\left(\frac{(h_{n-1} + h_{n-2})(h_{n-1} + 2h_{n-2})}{h_{n-2}}\right) + = 6\left[\frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{h_{n-2}}\right]$$

Exemple (suite) : $S_1 = 29$, $S_2 = 11$, $S_3 = -7$, $S_4 = -25$

4. nous imposons des valeurs aux pentes des extrémités **Type 4**

$$Q_1'(x_1) = y_1' \quad \textbf{Imposée}$$
$$Q_{n-1}'(x_n) = y_n' \quad \textbf{Imposée}$$



$$Q_1(x) = a_1(x - x_1)^3 + b_1(x - x_1)^2 + c_1(x - x_1) + d_1$$

$$Q_1'(x) = 3a_1(x - x_1)^2 + 2b_1(x - x_1) + c_1$$

$$Q_1'(x_1) = c_1 = y_1'$$

$$\frac{y_2 - y_1}{h_1} - \frac{(2S_1 + S_2)h_1}{6} = y_1'$$

$$\boxed{\frac{h_1}{3}S_1 + \frac{h_1}{6}S_2 = \frac{y_2 - y_1}{h_1} - y_1'} \qquad \text{(a)}$$

De même

$$Q_{n-1}(x) = a_{n-1}(x - x_{n-1})^3 + b_{n-1}(x - x_{n-1})^2 + c_{n-1}(x - x_{n-1}) + d_{n-1}$$

$$Q'_{n-1}(x) = 3a_{n-1}(x - x_{n-1})^2 + 2b_{n-1}(x - x_{n-1}) + c_{n-1}$$

$$Q'_{n-1}(x) = 3 \quad a_{n-1} \quad h_{n-1}^2 + 2 \quad b_{n-1} \quad h_{n-1} + \quad c_{n-1} = y'_n$$

$$3\frac{S_n - S_{n-1}}{6h_{n-1}}h_{n-1}^2 + 2\frac{S_{n-1}}{2}h_{n-1} + \left[\frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{2h_{n-1}S_{n-1} + h_{n-1}S_n}{6}\right] = y'_n$$

$$\boxed{\frac{h_{n-1}}{6}S_{n-1} + \frac{h_{n-1}}{3}S_n = y'_n - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}}} \qquad \text{(b)}$$

Nous devons maintenant ajouter ces 2 équations aux n-2 équations que nous avons déjà, et résoudre le système de n équations à n inconnues.

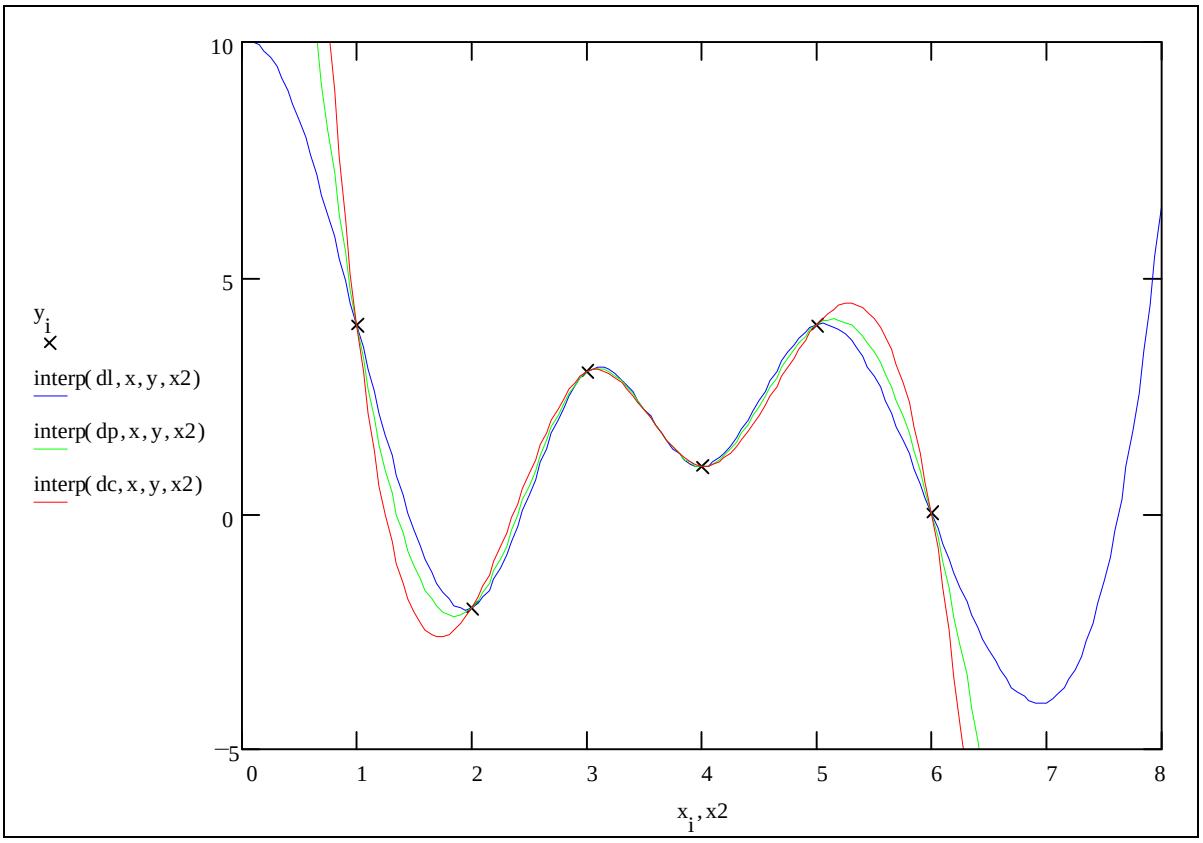
Exemple :

Faire passer des splines cubiques par les points suivants :
Avec des conditions frontières de types 1, 2 et 3.

i	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
x_i	1	2	3	4	5	6
$f(x_i)$	4	-2	3	1	4	0

La résolution du système nous donne:

$$S_{type\ 1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 21.474 \\ -19.895 \\ 16.105 \\ -14.526 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad S_{type\ 2} = \begin{bmatrix} 16.893 \\ 16.893 \\ -18.464 \\ 14.964 \\ -11.393 \\ -11.393 \end{bmatrix} \qquad S_{type\ 3} = \begin{bmatrix} 38.6 \\ 11 \\ -16.6 \\ 13.4 \\ -7 \\ -27.4 \end{bmatrix}$$



Interpolation par les splines cubiques
Algorithme de résolution de système tridiagonal

$$\begin{bmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{5,1} & a_{5,2} & a_{5,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{6,1} & a_{6,2} & a_{6,3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{7,1} & a_{7,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ S_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,4} \\ a_{2,4} \\ a_{3,4} \\ a_{4,4} \\ a_{5,4} \\ a_{6,4} \\ a_{7,4} \end{bmatrix}$$

Une résolution par élimination de Gauss est équivalente à :

1. Factorisation :

$$a_{i,2} = a_{i,2} - \frac{a_{i,1}}{a_{i-1,2}} a_{i-1,3} \qquad a_{i,1} = 0 \qquad \text{pour } i = 2,\text{K},n$$

$$a_{i,4} = a_{i,4} - \frac{a_{i,1}}{a_{i-1,2}} a_{i-1,4} \qquad a_{i,3} = a_{i,3}$$

2. Substitution arrière :

$$a_{n,4} = \frac{a_{n,4}}{a_{n,2}} \qquad \text{pour } i = n-1,\text{K},1$$

$$a_{i,4} = \frac{a_{i,4} - a_{i,3} * a_{i+1,4}}{a_{i,2}}$$

Les lignes courbes : Courbes de Bézier

Inventées dans le but de mieux contrôler la conception (CAO) d'automobile chez la compagnie Renault par Pierre Bézier.

La notion de points de contrôle apparaît dans le but de manipuler la courbe plus facilement.

Cependant, la modification d'un seul point de contrôle entraîne une modification de la courbe entière: on parle alors de contrôle global.

On se libère de cette contrainte en définissant une courbe de Bézier par morceau.

On peut définir une portion de courbe de Bézier à partir de n+1 points à l'aide de polynômes particuliers qui jouent le rôle de facteurs de pondération entre les points.

Le polynôme de Bézier de degré n est donné par :

$$P(u) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (1-u)^{n-i} u^i p_i \quad avec \quad \binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

Représentation paramétrique :

$$p(u) = \begin{pmatrix} x(u) \\ y(u) \end{pmatrix} \; avec \quad 0 \le u \le 1$$

avec $p_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$ $0 \le i \le n$ (n+1 points)

Ces fonctions de pondération sont les polynômes de Bernstein.

$$BEZ_{i,n}(u) = \binom{n}{i}(1-u)^{n-i}u^i$$

Le polynôme de Bézier de degré n est équivalent à :

$$x(u) = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(1-u)^{n-i}u^i x_i$$

$$y(u) = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(1-u)^{n-i}u^i y_i$$

Remarque :

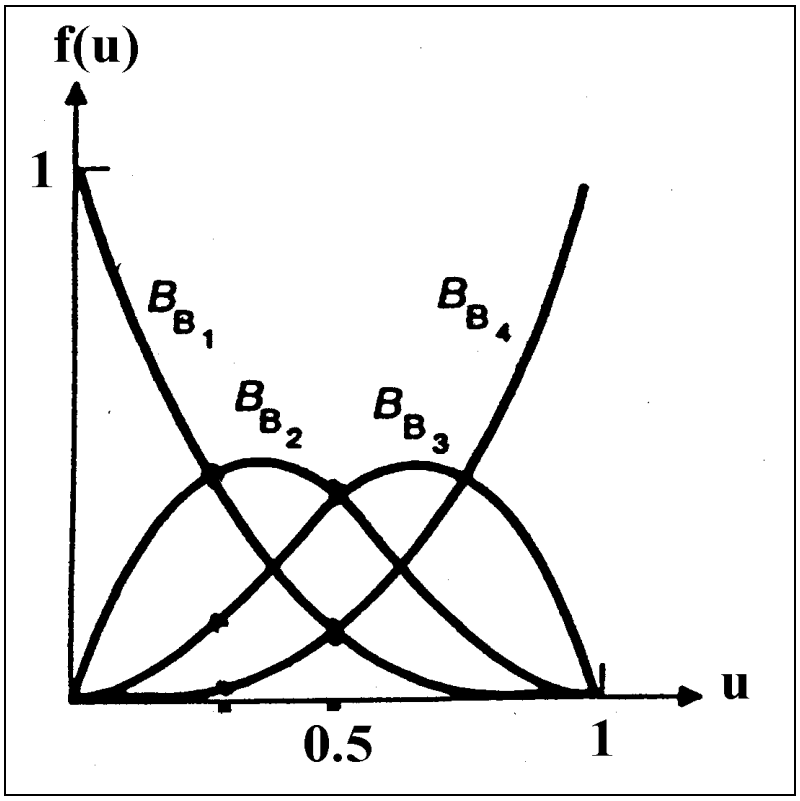
$$BEZ_{k,k}(u) = \binom{k}{k}(1-u)^{k-k}u^k = u^k$$

$$BEZ_{0,k}(u) = \binom{k}{0}(1-u)^{k-0}u^0 = (1-u)^k$$

C**ourbes de Bézier cubiques :**

Nous avons alors les polynômes de Bernstein suivants :

$$BEZ_{0,3} = (1-u)^3$$
$$BEZ_{1,3}(u) = 3u(1-u)^2$$
$$BEZ_{2,3}(u) = 3u^2(1-u)$$
$$BEZ_{3,3}(u) = u^3$$



donc

$$x(u) = (1-u)^3 x_0 + 3u(1-u)^2 x_1 + 3u^2(1-u)x_2 + u^3 x_3$$
$$y(u) = (1-u)^3 y_0 + 3u(1-u)^2 y_1 + 3u^2(1-u)y_2 + u^3 y_3$$

Propriétés des courbes de Bézier :

1. Une courbe de Bézier passe toujours par le premier et le dernier point.

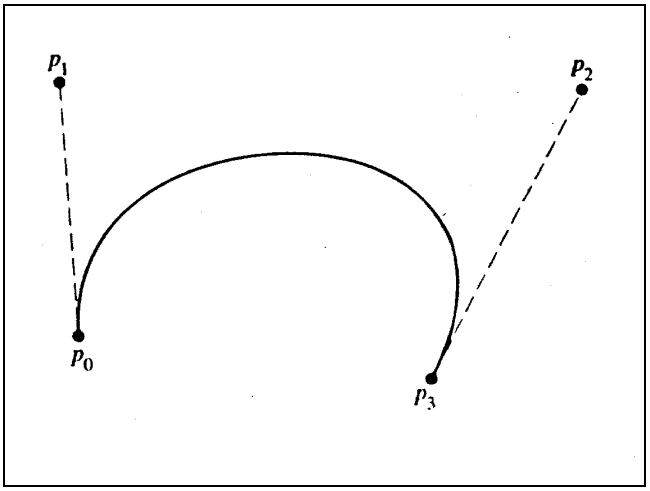
$$p(0) = p_0$$
$$p(1) = p_n$$

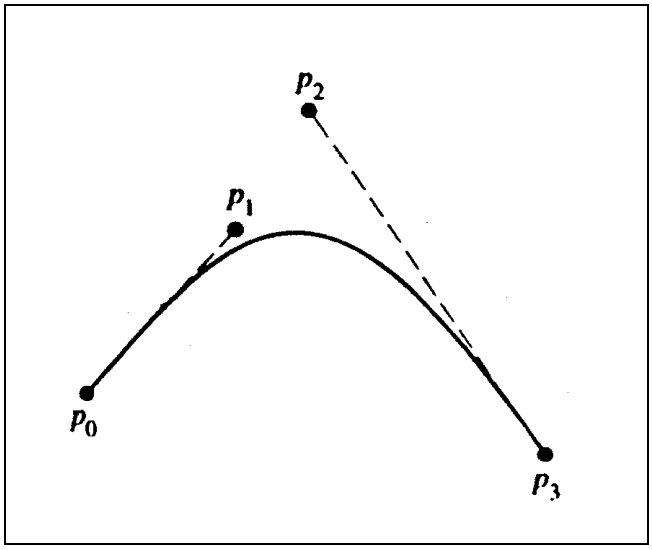
2. La courbe de Bézier est contenue dans l'enveloppe convexe formée par les points de contrôle.
L'enveloppe convexe d'un ensemble de points est le plus petit ensemble convexe contenant tout ces points.

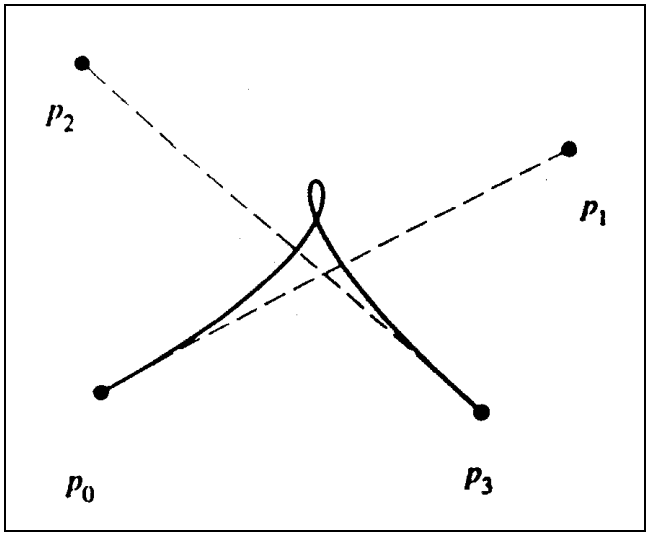
3. À u = 0, $\frac{dx}{du} = 3(x_1 - x_0)$ et $\frac{dy}{du} = 3(y_1 - y_0)$

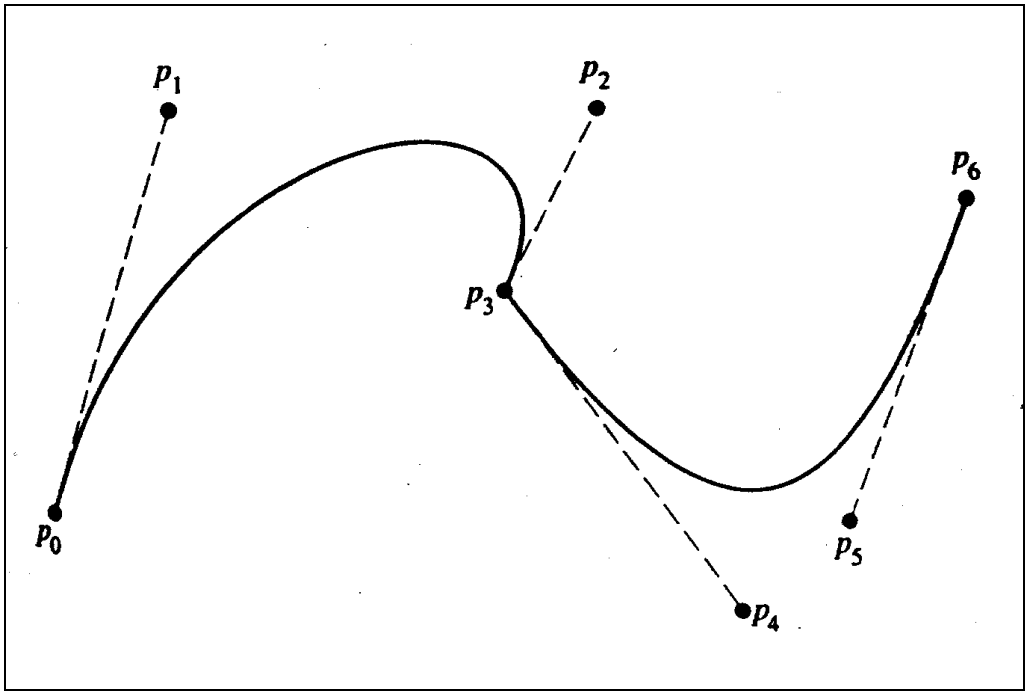
La pente de la courbe à u = 0 est $\frac{dy}{dx} = \frac{(y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)}$.
C'est la pente de la droite passant par p_0 et p_1.

De la même façon, en u =1, la pente de la courbe de Bézier au dernier point est la même que la pente de la droite joignant les 2 derniers points.

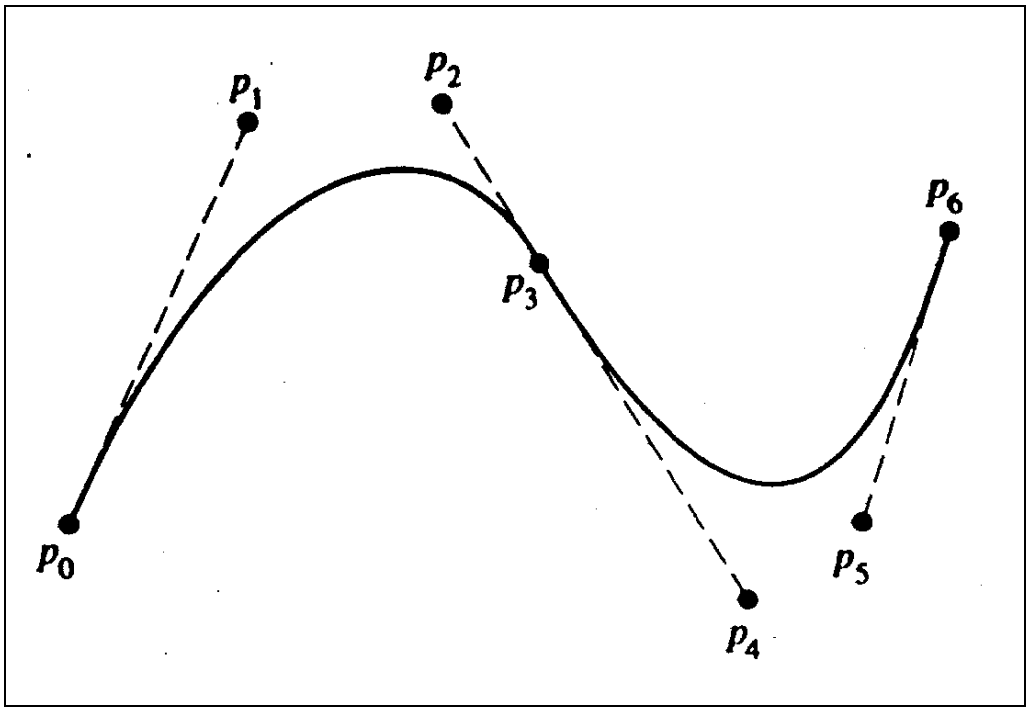

p_1
p_2
p_0
p_3


p_2
p_1
p_0
p_3

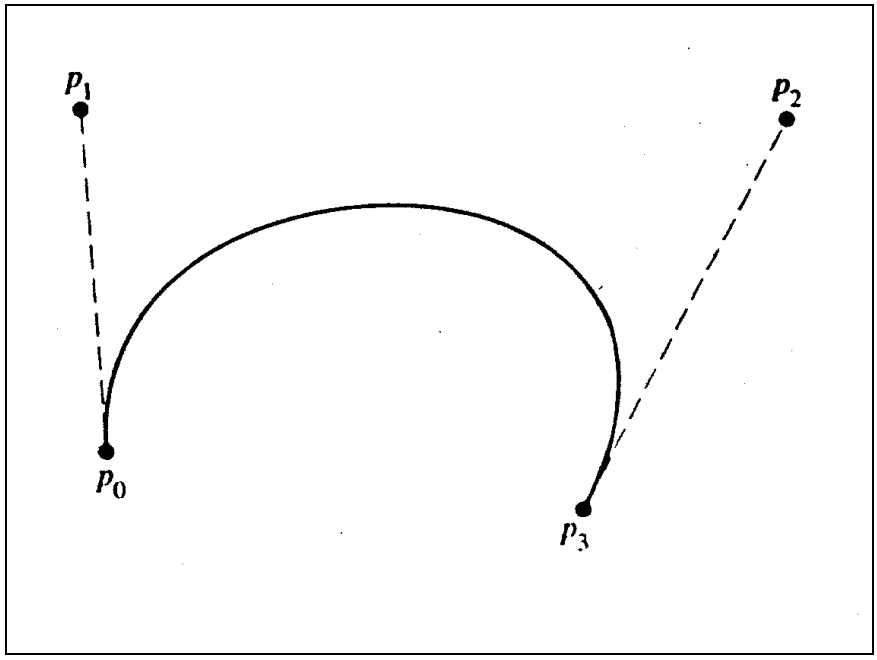

p_2
p_1
p_0
p_3

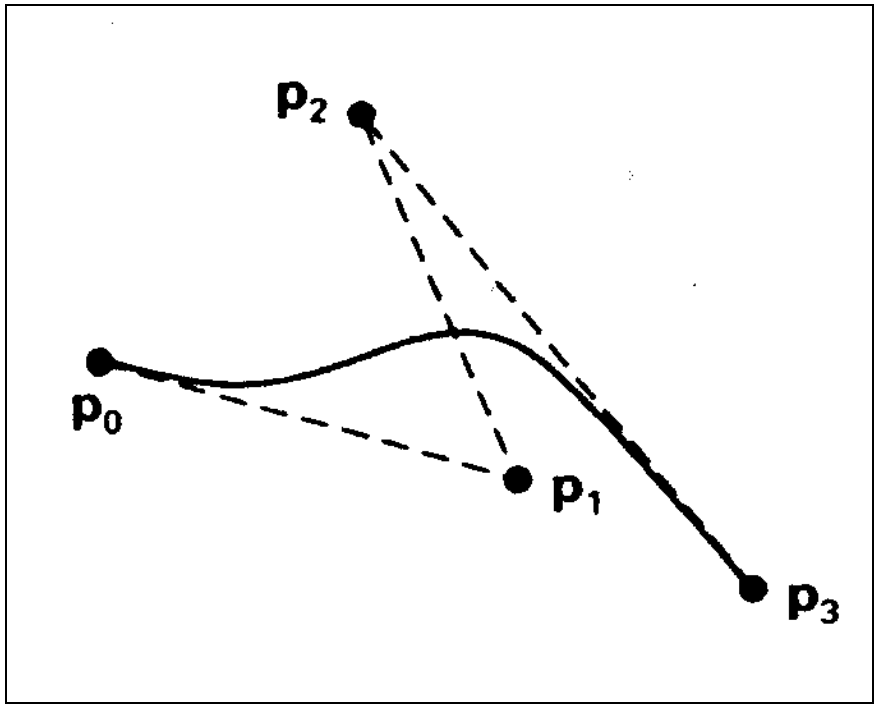


P_2, P_3 et P_4 ne sont pas alignés.



P_2, P_3 et P_4 sont alignés.


p_1
p_2
p_0
p_3


$\mathbf{p}_2$
$\mathbf{p}_0$
$\mathbf{p}_1$
$\mathbf{p}_3$

Représentation matricielle des courbes de Bézier cubiques :

$$P(u) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (1-u)^{n-i} u^i p_i \qquad avec \quad \binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

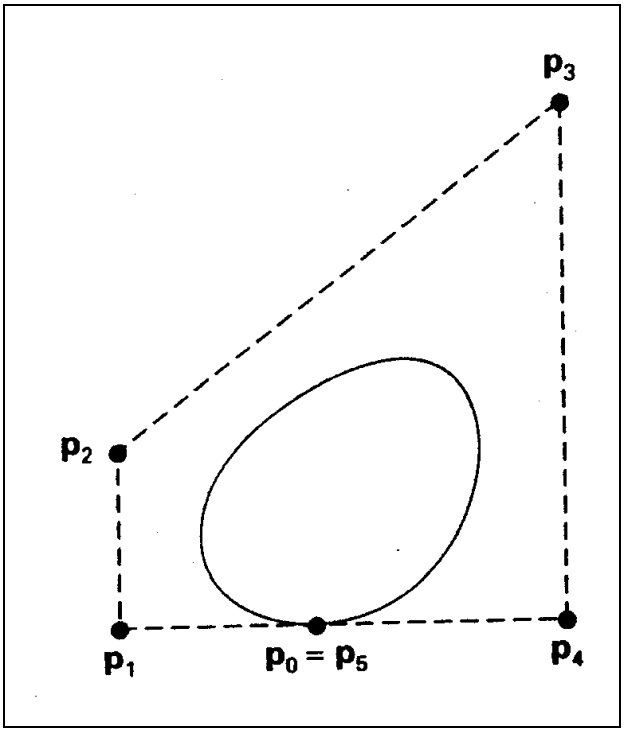
peut être écrit pour une courbe de Bézier cubique:

$$P(u) = \begin{bmatrix} u^3, u^2, u, 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}$$

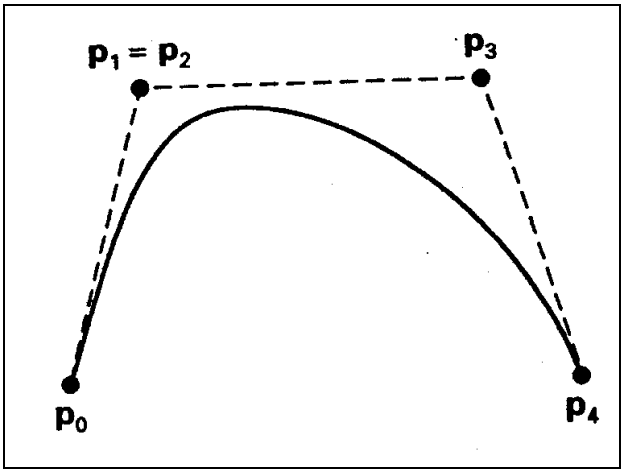
$$P(u) = u^T M_{Bez} p$$

Exemple d'utilisation des courbes de Bézier :

Courbe Fermée:



Passage plus proche d'un point de contrôle:

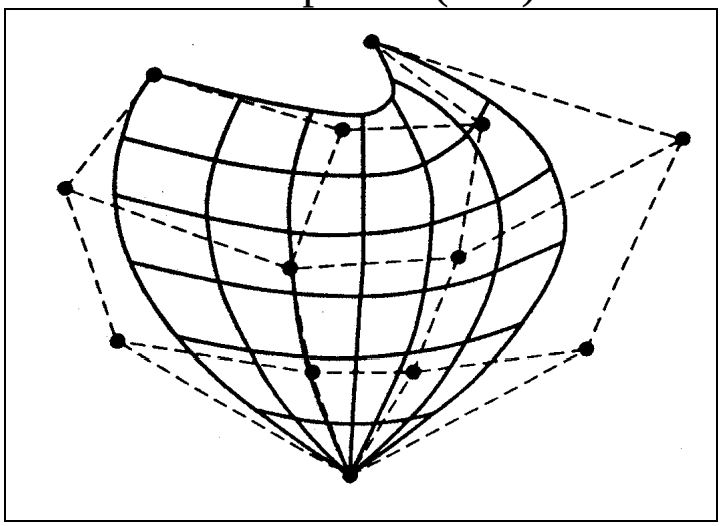


Les Surfaces courbes de Bézier: 3D

Pour étendre les calculs précédents à des surfaces, il s'agit d'ajouter un paramètre v et la surface est donnée par:

$$P(u,v) = \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} p_{j,k} BEZ_{j,m}(v) BEZ_{k,n}(u)$$

Pour des surfaces de Béziers cubiques, nous allons avoir besoin de 16 points (4x4)



en notation matricielle, nous avons :

$$x(u,v) = \begin{bmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{bmatrix} M_{Bez}\, X\, M_{Bez}^T \begin{bmatrix} v^3 & v^2 & v & 1 \end{bmatrix}^T$$

$$y(u,v) = \begin{bmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{bmatrix} M_{Bez}\, Y\, M_{Bez}^T \begin{bmatrix} v^3 & v^2 & v & 1 \end{bmatrix}^T$$

$$z(u,v) = \begin{bmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{bmatrix} M_{Bez}\, Z\, M_{Bez}^T \begin{bmatrix} v^3 & v^2 & v & 1 \end{bmatrix}^T$$

$$avec \quad X = \begin{bmatrix} x_{0,0} & x_{0,1} & x_{0,2} & x_{0,3} \\ x_{1,0} & x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} \\ x_{2,0} & x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3} \\ x_{3,0} & x_{3,1} & x_{3,2} & x_{3,3} \end{bmatrix}$$

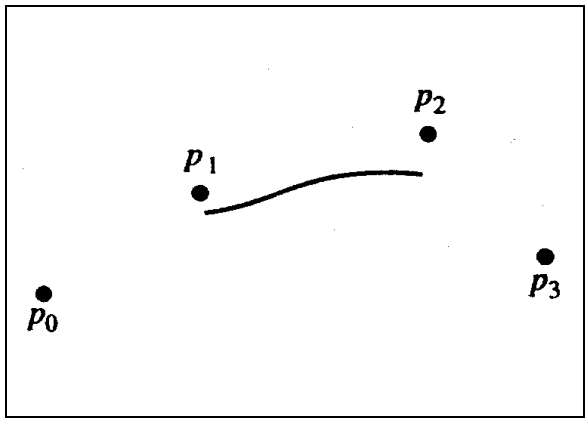
Les lignes courbes: Courbe B-Spline cubique

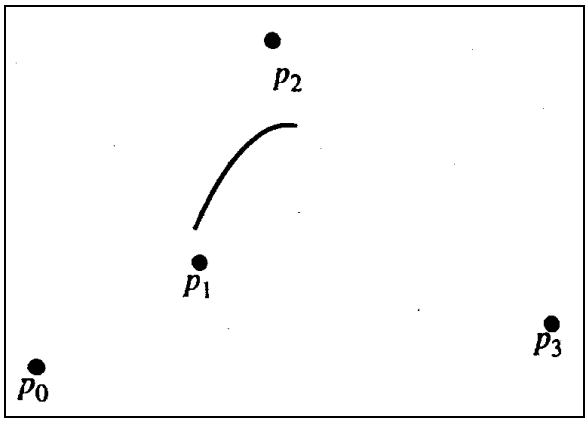
B-Spline cubique:

Inventée aussi dans le but de mieux contrôler le design.(DAO et CAO).

La notion de points de contrôle existe aussi dans le but de manipuler la courbe plus facilement mais contrairement aux courbes de Bézier, l'effet de la manipulation d'un point de contrôle demeure locale.

On peut définir une portion de courbe de B-Spline cubique à partir de 4 points avec l'aide de polynômes particulier qui jouent le rôle de fonctions de "mélange" entre les points.

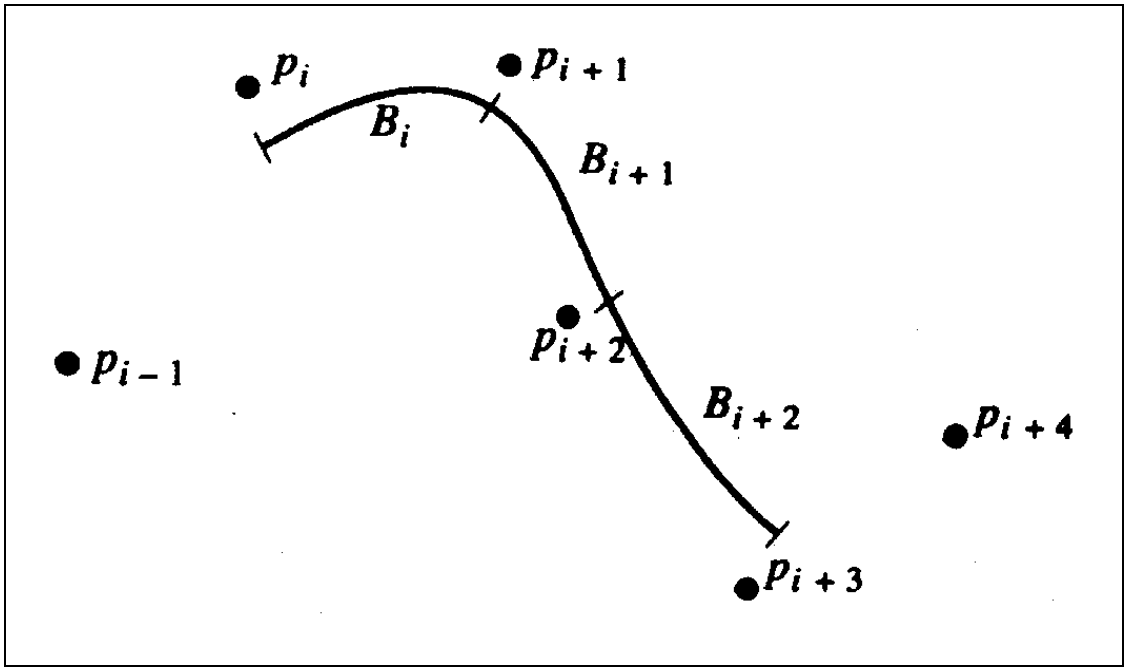




Contrairement aux courbes de Bézier cependant, les l^{er} et 4^{e} points n'appartiennent pas nécessairement par la courbe ainsi les 4 points agissent comme des points de contrôle.

Comme pour les splines cubiques, les mêmes contraintes de continuité sont utilisées pour joindre les segments de B-Splines.

On prend des groupes de 4 points se chevauchants :



Cependant si on désire terminer la courbe aux points extrémités P_0 et P_n, il suffit de générer 4 nouveaux points

i.e. $P_{-1} = P_{-2} = P_0$ ainsi que $P_{n+1} = P_{n+2} = P_n$.

L'équation paramétrique d'une B-Spline cubique est :

pour n+1 points $p_i = (x_i, y_i)$ i = 0, ... ,n.
La B-Spline cubique pour l'intervalle (p_i, p_{i+1})
pour i = 1,2,..., n-1

$$B_i(u) = \sum_{k=-1}^{2} b_k \, p_{i+k} \text{ avec}$$

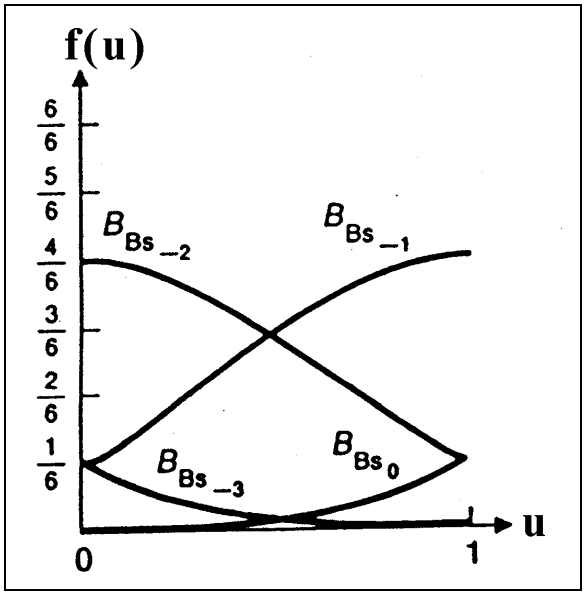
où les b_i sont des fonctions de 'mélange'.

$$b_{-1} = \frac{(1-u)^3}{6}$$

$$b_0 = \frac{u^3}{2} - u^2 + \frac{2}{3}$$

$$b_1 = -\frac{u^3}{2} + \frac{u^2}{2} + \frac{u}{2} + \frac{1}{6}$$

$$b_2 = \frac{u^3}{6}, \qquad 0 \le u \le 1$$



Représentation matricielle des courbes de B-Splines cubiques :

$$B_i(u) = \sum_{k=-1}^{2} b_k \, p_{i+k}$$

peut être écrit pour une courbe B-Spline cubique:

$$B_i(u) = \frac{1}{6}\left[u^3, u^2, u^1, 1\right]\begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{i-1} \\ p_i \\ p_{i+1} \\ p_{i+2} \end{bmatrix}$$

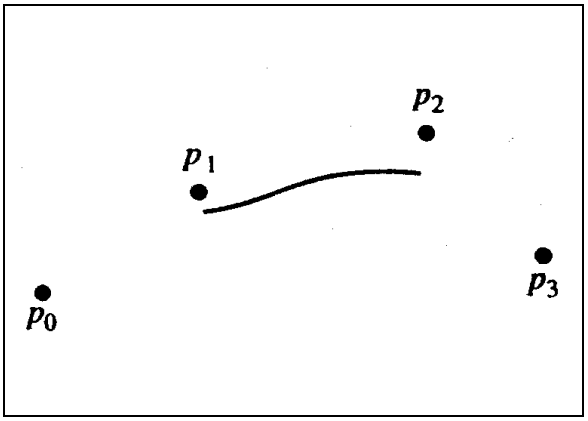
$$B_i(u) = \frac{u^T M_b p}{6}$$

Passer par les extrémités dans les courbes B-Splines cubiques :

Démonstration :

Si nous désirons terminer la courbe aux points extrémités p_0 et p_n, il suffit de générer 4 nouveaux points:

$p_{-2} = p_{-1} = p_0$ et $p_{n+2} = p_{n+1} = p_n$



L'équation de la B-Spline est :

$$B_i(u) = \frac{1}{6}\left[u^3, u^2, u^1, 1\right]\begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{i-1} \\ p_i \\ p_{i+1} \\ p_{i+2} \end{bmatrix}$$

Évaluons cette équation pour le nouveau premier segment c-à-d B_{-1} en posant $p_{-2} = p_{-1} = p_0$ alors :

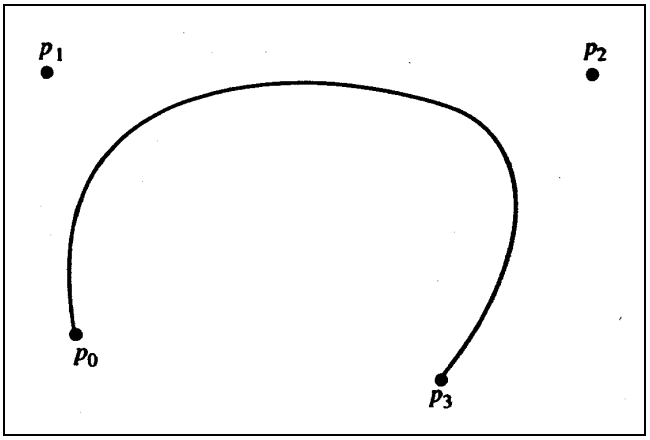
$$B_{-1}(u) = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} u^3, u^2, u^1, 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{-2} \\ p_{-1} \\ p_0 \\ p_1 \end{bmatrix}$$

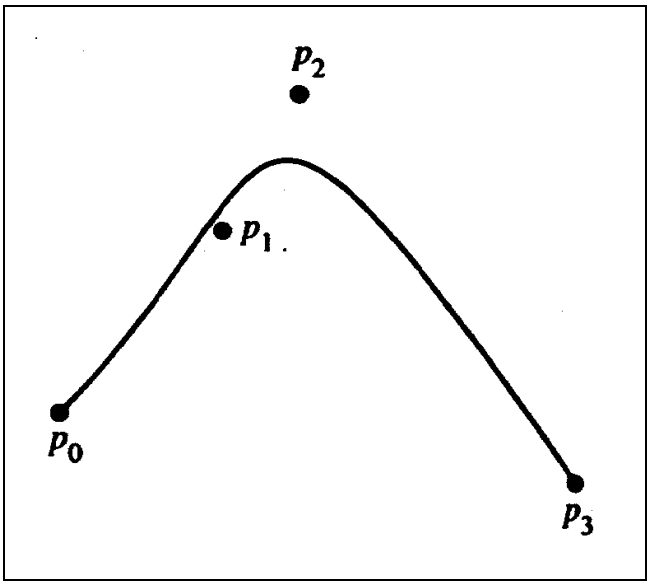
$$B_{-1}(u) = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} u^3, u^2, u^1, 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \\ p_0 \\ p_0 \\ p_1 \end{bmatrix}$$

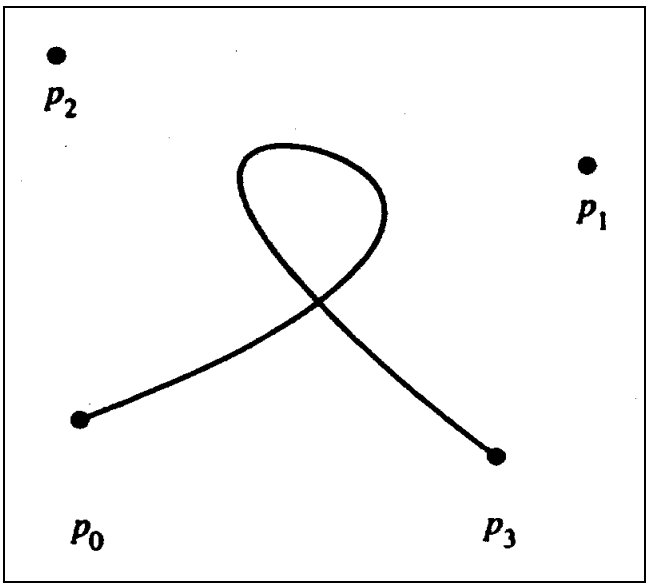
$$B_{-1}(u) = \frac{1}{6}(p_1 - p_0)\, u^3 + p_0$$

Pour u = 0, nous obtenons bien : $B_{-1}(0) = p_0$.

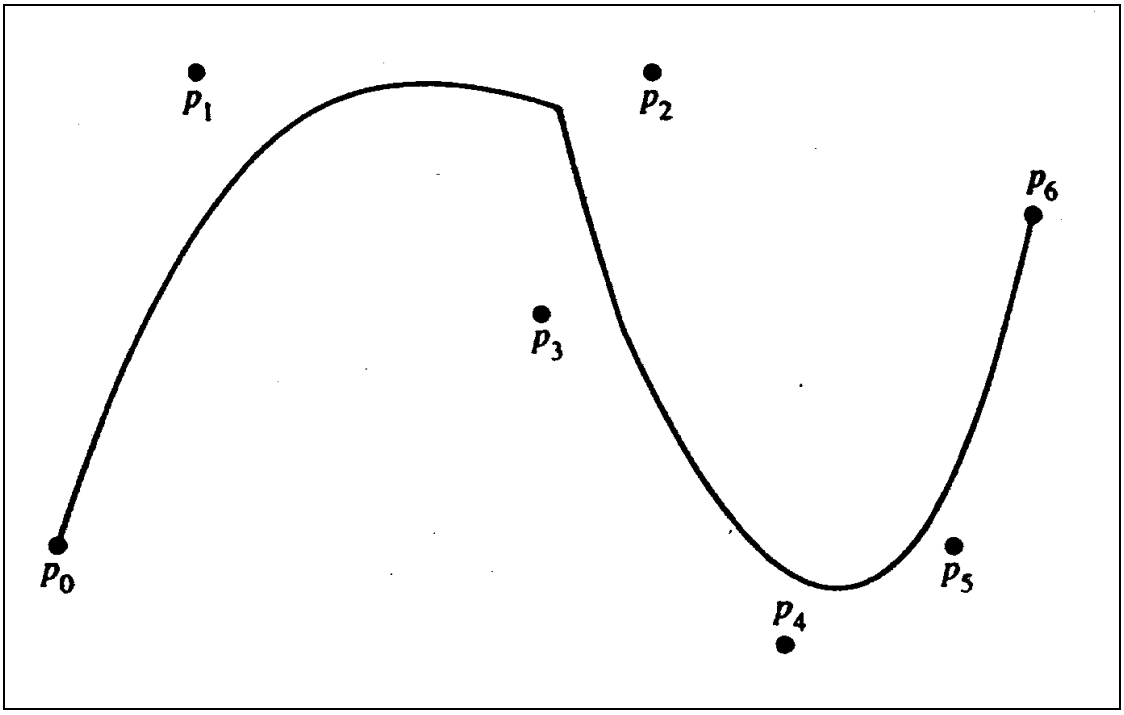
Note : un développement similaire peu être fait pour p_n.


p_1
p_2
p_0
p_3

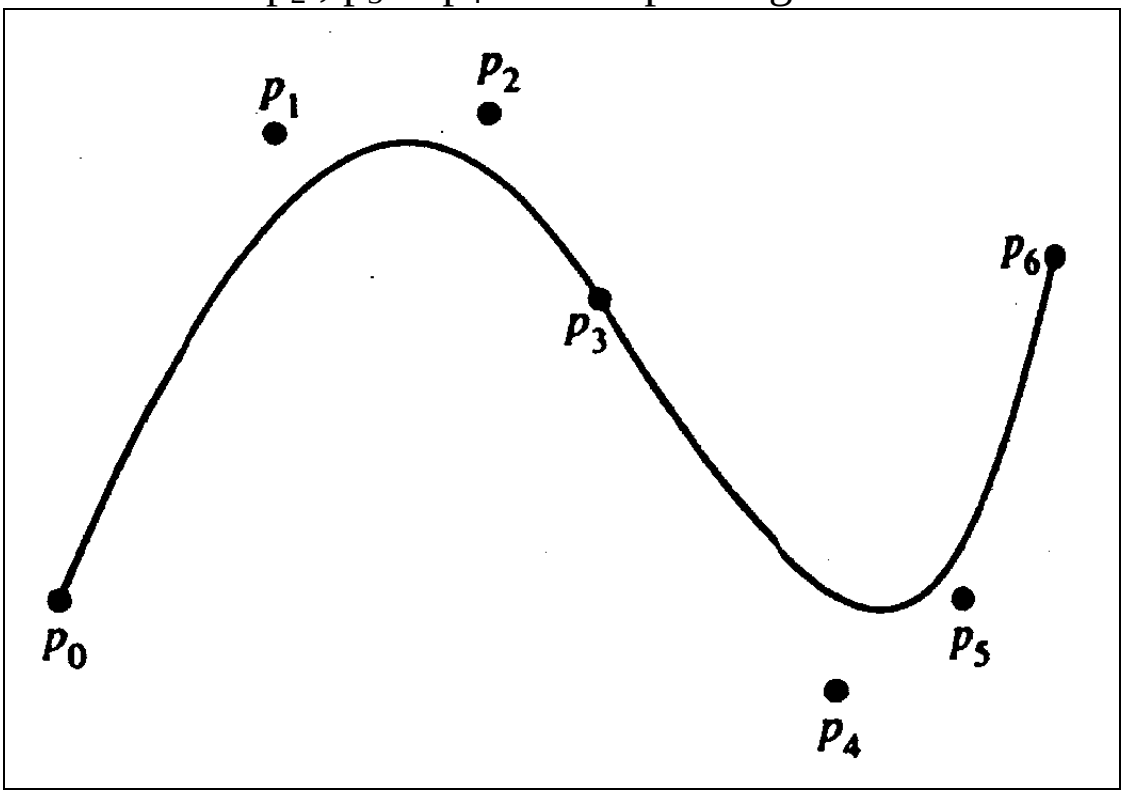

p_2
p_1
p_0
p_3


p_2
p_1
p_0
p_3

Joindre 2 courbes B-Spline:



p_2 , p_3 et p_4 ne sont pas alignés



p_2 , p_3 et p_4 sont alignés

Les Surfaces courbes B-Spline : 3D

Pour étendre les calculs précédents à des surfaces, il s'agit d'ajouter un paramètre v et la surface est donnée par:

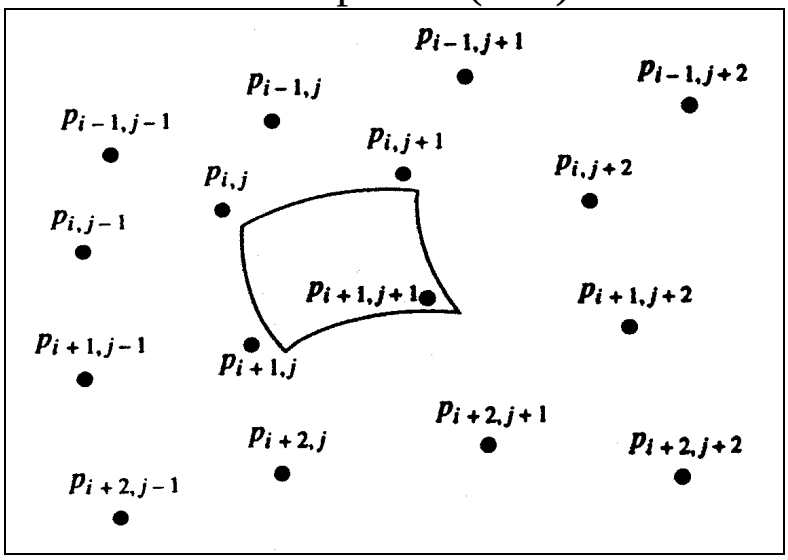
$$x(u,v) = \frac{1}{36}\begin{bmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{bmatrix} M_b X_{i,j} M_b^T \begin{bmatrix} v^3 & v^2 & v & 1 \end{bmatrix}^T$$

$$y(u,v) = \frac{1}{36}\begin{bmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{bmatrix} M_b Y_{i,j} M_b^T \begin{bmatrix} v^3 & v^2 & v & 1 \end{bmatrix}^T$$

$$z(u,v) = \frac{1}{36}\begin{bmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{bmatrix} M_b Z_{i,j} M_b^T \begin{bmatrix} v^3 & v^2 & v & 1 \end{bmatrix}^T$$

$$\textit{avec} \quad X_{i,j} = \begin{bmatrix} x_{i-1,j-1} & x_{i-1,j} & x_{i-1,j+1} & x_{i-1,j+2} \\ x_{i,j-1} & x_{i,j} & x_{i,j+1} & x_{i,j+2} \\ x_{i+1,j-1} & x_{i+1,j} & x_{i+1,j+1} & x_{i+1,j+2} \\ x_{i+2,j-1} & x_{i+2,j} & x_{i+2,j+1} & x_{i+2,j+2} \end{bmatrix}$$

Pour des surfaces B-Splines cubiques, nous allons avoir besoin de 16 points (4x4)



Interpolation de surfaces par des surfaces polynomiales de collocation

But : interpoler un point en 3 dimensions.

Pour une fonction à 2 variables z = f(x,y)

x\y	0.2	0.3	0.4	0.5
1.0	0.640	1.003	1.359	1.703
1.5	0.990	1.524	2.045	2.549
2.0	1.568	2.384	3.177	3.943

$$z = f(x,y) = e^{x}\ Sin(y) + y - 0.1$$

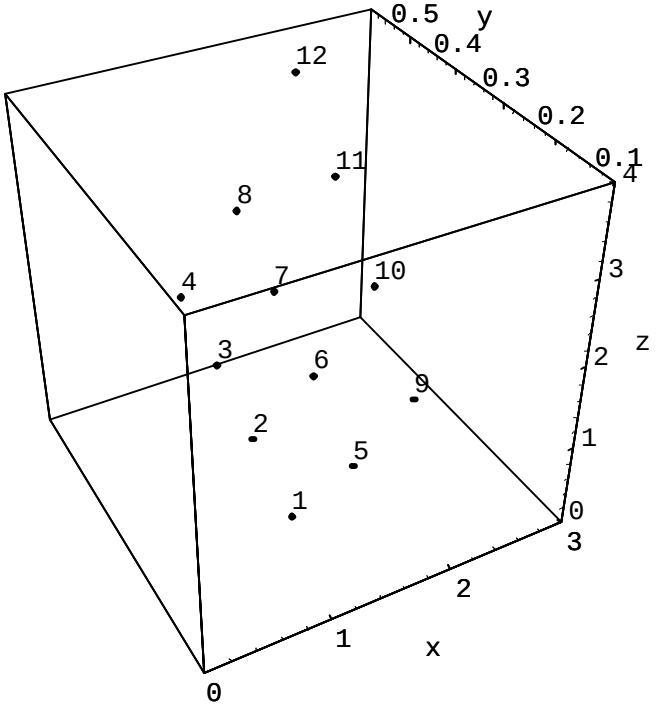
Nous voulons interpoler la valeur de la fonction en f(1.6,0.33).

2 approches possibles :

1. Interpoler directement la fonction au point considéré.

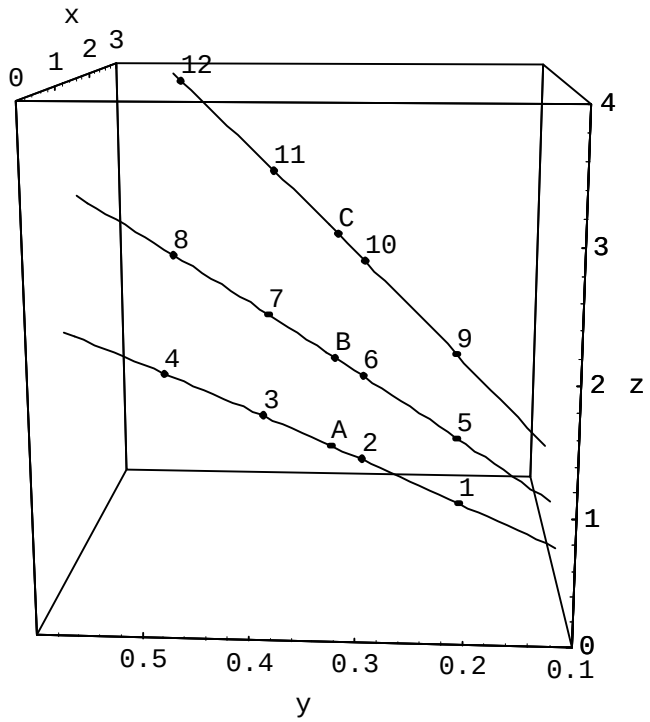
2. Calculer l'équation de la surface de collocation et utiliser l'équation de cette surface pour interpoler la valeur de la fonction au point d'intérêt.

1. **Interpoler directement la fonction au point considéré.**

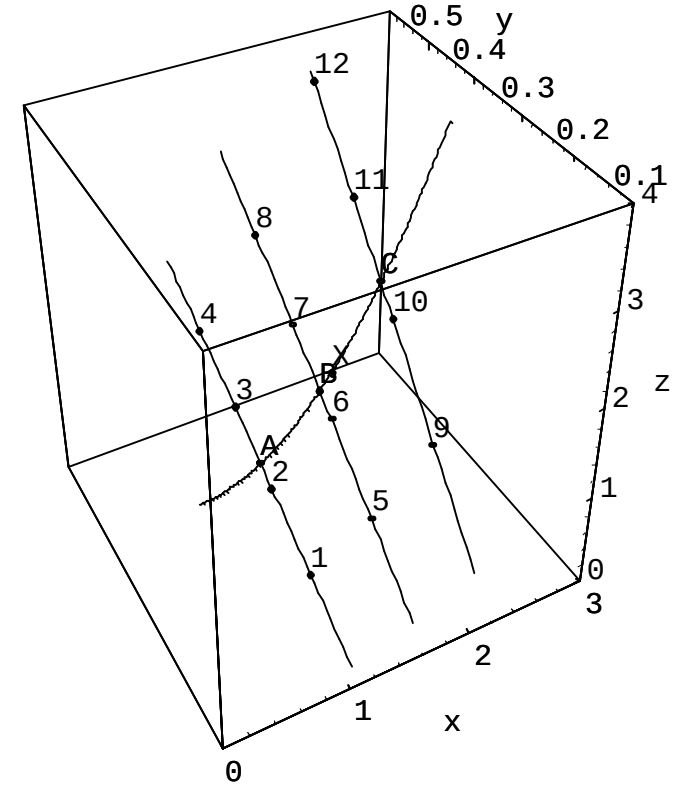


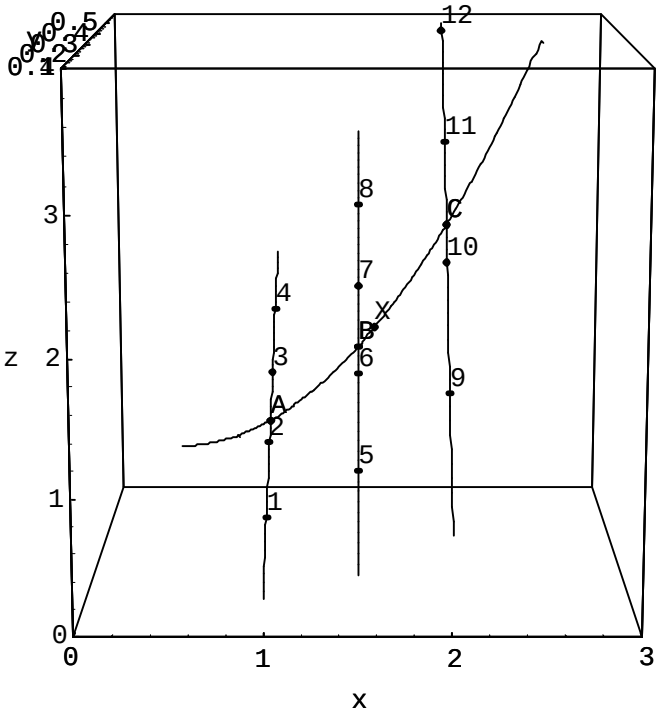
Ensemble de points

Pour x constant, interpolation en y.



Interpolation en x pour y = 1.6





Interpolation en y

	y	z	Δz	Δ^2z	Δ^3z
	0.2	0.640			
			0.363		
	0.3	1.003		-0.007	
x = 0.1			0.356		-0.005
	0.4	1.359		-0.012	
			0.344		
	0.5	1.703			
	0.2	0.990			
			0.534		
	0.3	1.524		-0.013	
x = 1.5			0.521		-0.004
	0.4	2.045		-0.017	
			0.504		
	0.5	2.549			
	0.2	1.568			
			0.816		
	0.3	2.384		-0.023	
x = 2.0			0.793		-0.004
	0.4	3.177		-0.027	
			0.766		
	0.5	3.943			

Étape 1 :

x = 1.0

$$z = P_3(y) = z_0 + \binom{S}{1}\Delta z_0 + \binom{S}{2}\Delta^2 z_0 + \binom{S}{3}\Delta^3 z_0$$

$S=(y-y_0)/h = (0.33-0.2)/0.1 = 1.3$

$P_3(0.33) = 0.640+1.3*0.363+1.3*0.3*(-0.007)/2+1.3*0.3*(-0.7)(-0.005)/6$

$P_3(0.33) = 1.1108$

x = 1.5

$$P_3(0.33) = 1.6818$$

x = 2.0

$$P_3(0.33) = 2.6245$$

Étape 2 :

Interpolation en x

	x	z	Δz	Δ^2z	Δ^3z
	1.0	1.1108			
			0.5710		
y= 0.33	1.5	1.6818		0.3717	
			0.9427		
	2.0	2.6245			

$$z = P_2(x) = z_0 + \binom{S}{1}\Delta z_0 + \binom{S}{2}\Delta^2 z_0$$

$$S = \frac{x - x_0}{h} = \frac{1.6 - 1.0}{0.5} = 1.2$$

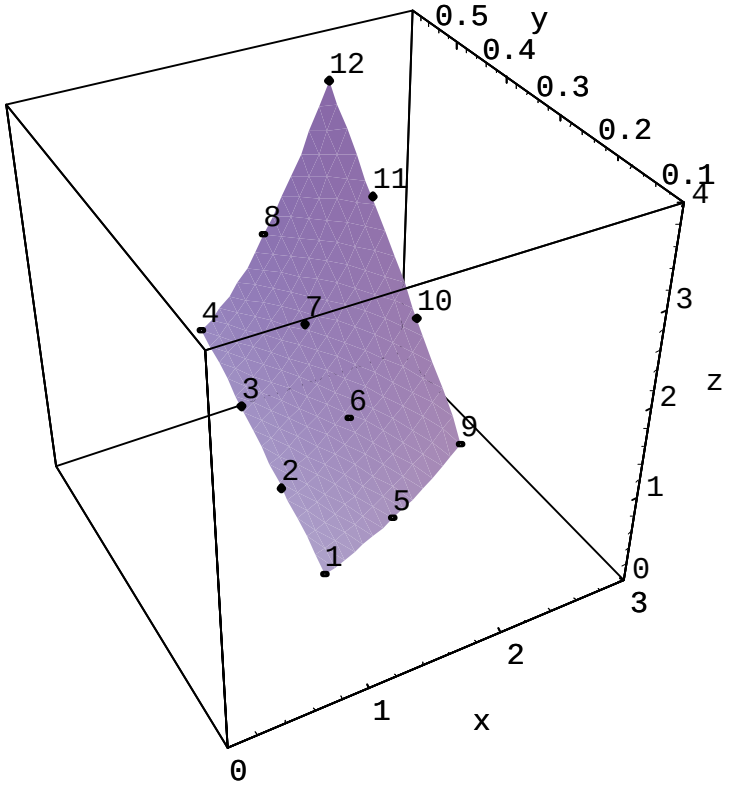
$$z = P_2(1.6)_{0.33} = 1.1108 + 1.2 * 0.571 + ½ * 1.2 * 0.2 *0.3717$$

$z = P_2(1.6)_{0.33} = 1.8406$

2. Calculer l'équation de la surface de collocation et utiliser l'équation de cette surface.

L'équation de la surface de collocation est:

$$P_{2,3}(x,y) = -0.065 - 0.018\ x - 0.004\ x^2 + 3.28167\ y - 2.02667\ x\ y + 2.33333\ x^2\ y + 1.15\ y^2 - 0.65\ x\ y^2 - 0.1\ x^2\ y^2 - 1.66667\ y^3 + 1.16667\ x\ y^3 - 0.333333\ x^2\ y^3$$



$$P(0.33, 1.6) = 1.8406$$

Ift 2421

Chapitre 4

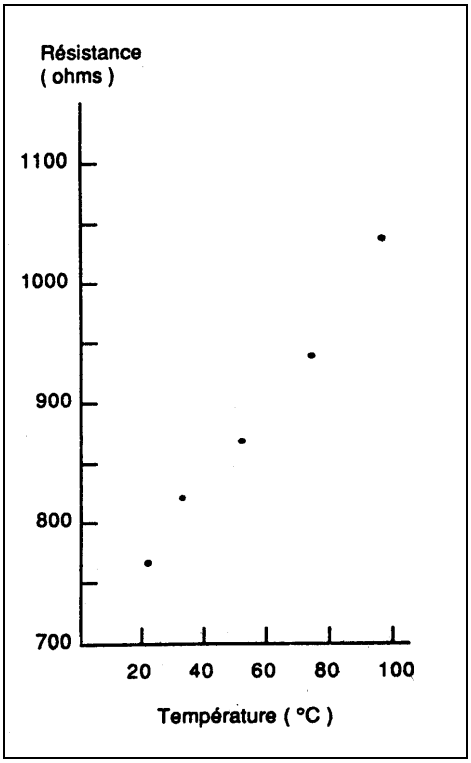
Interpolation polynomiale : Moindres carrés

Introduction

T_i (°C)	R_i (ohms)
20.5	765
32.7	826
51.0	873
73.2	942
95.7	1032

Lissage par moindres carrés
(régression linéaire)
Quelle est la meilleure
droite ?
(observation ou théorie)

$R = a\,T + b$



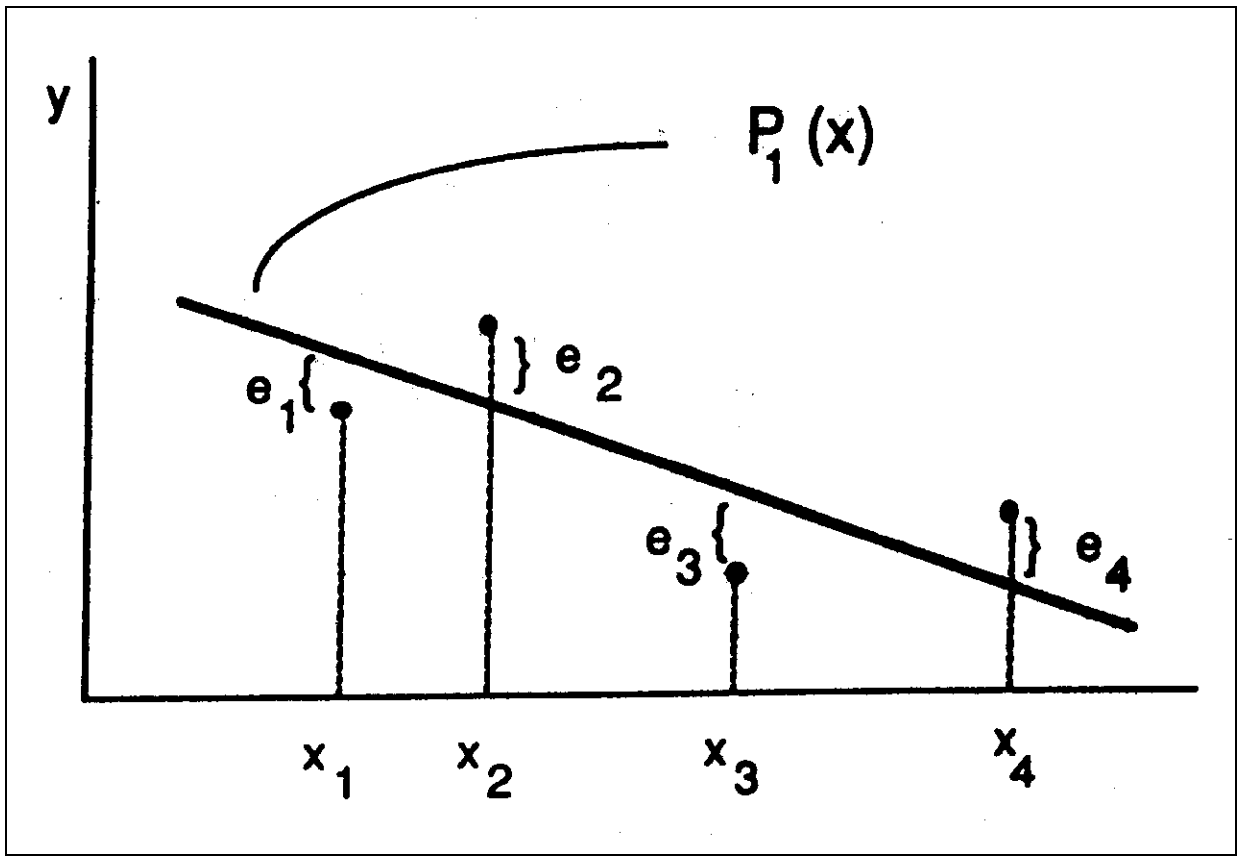
Lissage par moindres carrés

But :

Trouver un polynôme de degré fable passant par beaucoup de points.

Déterminer $P_n(x)$ avec $n \leq m-1$
qui minimise l'écart quadratique

$$R_2 = \{e_1\}^2 + \{e_2\}^2 + \{e_3\}^2 + \text{K} + \{e_N\}^2$$



Lissage par moindres carrés (régression linéaire)

Dans le cas de la droite, $P_1(x) = a\,x + b = y$

Soit $e_i = Y_i - y_i$

$$R_2 = \sum_{i=1}^{m} e_i^{\,2}$$

$$R_2 = \sum_{i=1}^{m} (Y_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^{m} (Y_i - a\,x_i - b)^2 = R_2(a,b)$$

Trouver a et b pour que R_2 soit minimum.

$$R_2 \quad \min \Rightarrow \frac{\partial R_2}{\partial a} = 0 \quad et \quad \frac{\partial R_2}{\partial a} = 0$$

$$\frac{\partial R_2}{\partial a} = \sum_{i=1}^{m} \left(2(Y_i - a\,x_i - b)\frac{\partial}{\partial a}(Y_i - a\,x_i - b) \right) = 0$$

$$\frac{\partial R_2}{\partial b} = \sum_{i=1}^{m} \left(2(Y_i - a\,x_i - b)\frac{\partial}{\partial b}(Y_i - a\,x_i - b) \right) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{m} \left((Y_i - a\,x_i - b)(-x_i \right) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{m} \left((Y_i - a\,x_i - b)(-1 \right) = 0$$

Équations Normales $\boxed{\begin{aligned} a\sum x_i^2 + b\sum x_i &= \sum x_i y_i \\ a\sum x_i + b\,m &= \sum y_i \end{aligned}} \Rightarrow$ a, b : y=ax + b

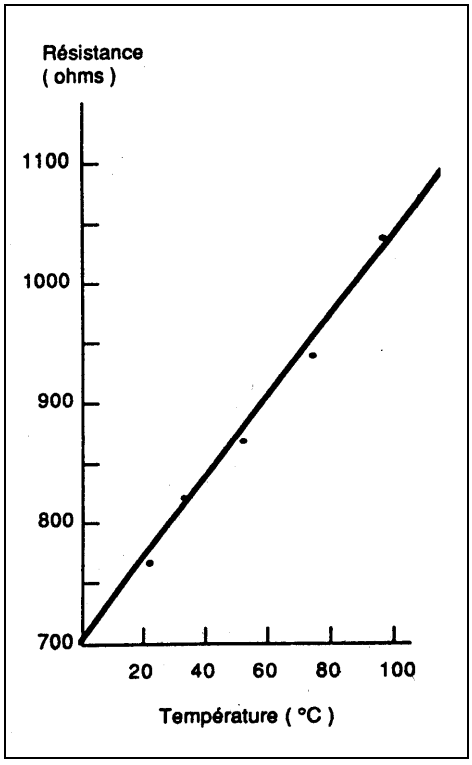
Lissage par moindres carrés
(régression linéaire)

Exemple :

	Ti (°C)	R_i (ohms)	T_i^2	$T_i R_i$
	20.5	765		
	32.7	826		
	51.0	873		
	73.2	942		
	95.7	1032		
Total :	273.1	4438	18607.27	254932.5

$$\begin{bmatrix} 18607.27 & 273.1 \\ 273.1 & 5.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 254932.5 \\ 4438.0 \end{bmatrix}$$

$$P_1(x) = a\,x + b = 3.395\,x + 702.2$$



Remarque : les problèmes de ce type peuvent aussi être résolus par la méthode des systèmes surdéterminés.

$$\begin{aligned} y_1 &= ax_1 + b \\ y_2 &= ax_2 + b \\ &\text{M} \\ y_m &= ax_m + b \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \text{M} & 1 \\ x_m & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \text{M} \\ y_m \end{bmatrix} \Rightarrow A^T Ax = A^T b$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \text{K} & x_m \\ 1 & 1 & & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \text{M} & \\ x_m & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \text{K} & x_m \\ 1 & 1 & & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \\ y_m \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1^2 + x_2^2 + \text{K} + x_m^2 & x_1 + x_2 + \text{K} + x_m \\ x_1 + x_2 + \text{K} + x_m & m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 y_1 + x_2 y_2 + \text{K} + x_m y_m \\ y_1 + y_2 + \text{K} + y_m \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sum x_i^2 & \sum x_i \\ \sum x_i & m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum x_i y_i \\ \sum y_i \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} a \sum x_i^2 + b \sum x_i &= \sum x_i y_i \\ a \sum x_i + b\, m &= \sum y_i \end{aligned}}$$

Lissage par moindres carrés (régression non linéaire) Polynôme

Dans d'un polynôme de degré arbitraire,

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$$

Soit $e_i = Y_i - P_n(x_i)$

$$R_2 = \sum_{i=1}^{m} e_i^{\,2} = \sum_{i=1}^{m} \left(Y_i - P_N\left(x_i\right) \right)^2$$

Minimum pour :

$$\boxed{\frac{\partial R_2}{\partial a_j} = \sum_{i=1}^{m} 2(Y_i - P_N(x_i))(-x_i^{\,j}) = 0}$$

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{m} 1 & \sum_{i=1}^{m} x_i & \text{K} & \sum_{i=1}^{m} x_i^N \\ \sum_{i=1}^{m} x_i & \sum_{i=1}^{m} x_i^2 & \text{K} & \sum_{i=1}^{m} x_i^{N+1} \\ \text{K} & \text{K} & \text{K} & \text{K} \\ \sum_{i=1}^{m} x_i^N & \sum_{i=1}^{m} x_i^{N+1} & \text{K} & \sum_{i=1}^{m} x_i^{2N} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \text{K} \\ a_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{m} x_i \\ \sum_{i=1}^{m} x_i y_i \\ \text{K} \\ \sum_{i=1}^{m} x_i^N y_i \end{bmatrix}$$

Lissage par moindres carrés
(régression non linéaire)
Différent d'un polynôme

Autre formes :

1. $y = a\, x^b$

2. $y = a\, e^{bx}$

Nous obtenons des systèmes linéaires difficiles à résoudre.

Changement de variables :

$z = \ln(y)$
$w = \ln(x)$

1. $\ln(y) = \ln(a) + b \ln(x)$
Modifications qui conduisent à la méthode linéaire :
$z = A + b\, w$

2. $\ln(y) = \ln(a) + b\, x$
Modifications qui conduisent à la méthode linéaire :
$z = A + b\, x$

Exemple : Régression en $y = a\, e^{bx}$ avec la table :

x	1.0	2.0	4.0
y	2.0	7.2	500.1

2. $\ln(y) = \ln(a) + b\, x$

x	1.0	2.0	4.0
ln(y)	0.693	1.974	6.215

Modifications qui conduisent à la méthode linéaire :

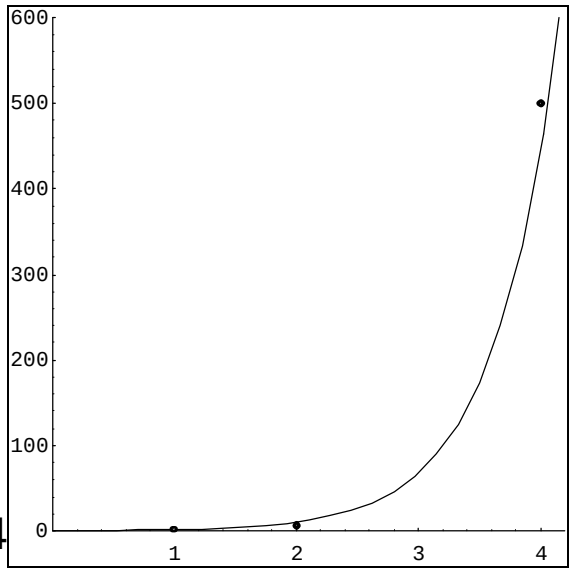
$z = A + b\, x$

x	z = ln(y)	x^2	x ln(y)
1	0.693	1	0.693
2	1.974	4	3.948
4	6.215	16	24.859

$$\begin{bmatrix} \sum x_i^2 & \sum x_i \\ \sum x_i & m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b \\ A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum x_i z_i \\ \sum z_i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 21 & 7 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b \\ A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29.5 \\ 8.882 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} b \\ A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.88 \\ -1.427 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} b = 1.88 \\ a = e^{-1.427} = 0.24 \end{array}$$



Autres méthodes de lissage

Moindres carrés : méthode populaire

D'autres méthodes de lissage
basées sur d'autres mesures pour l'erreur,
par exemple :

$$R_\infty = \max_{1 \le i \le m} |e_i|$$

$$R_1 = \sum_{i=1}^{m} |e_i|$$

La méthode des moindres carrés est pratique pour principalement deux raisons :

1. L'écart quadratique est dérivable (pas de valeur absolue).

2. En accord avec le principe de vraisemblance maximale des statistiques.