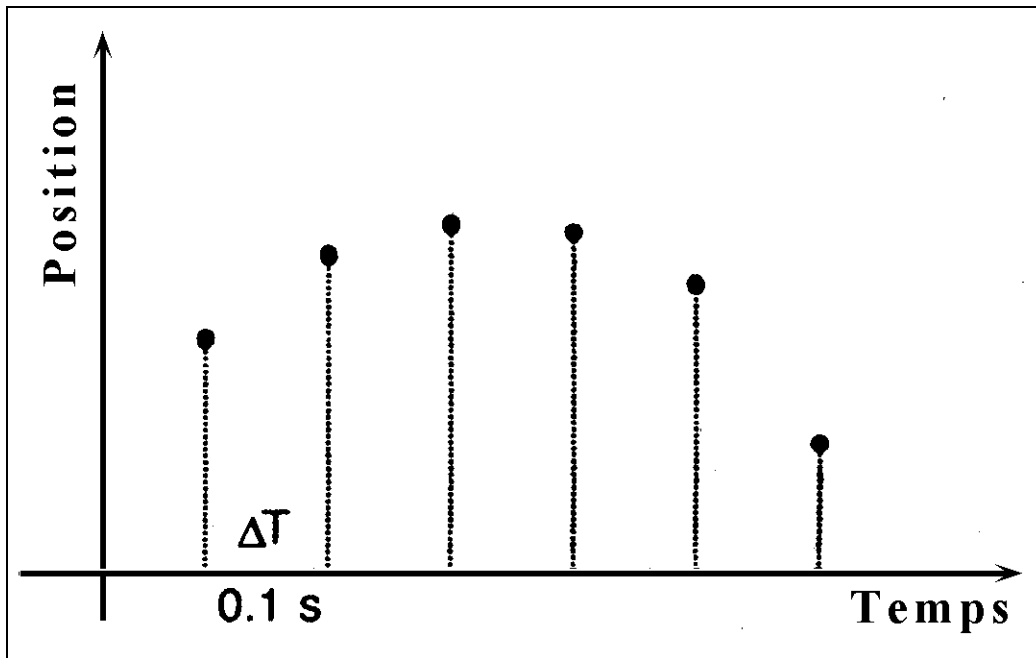


Ift 2421

Chapitre 5

Dérivation numérique

Introduction



Dérivation et intégration numériques

Déterminer avec précision :

1. La vitesse à chaque instant
2. L'accélération de la fusée
3. La consommation de carburant

Évaluer les dérivées premières et secondes
ainsi que l'intégrale de cette fonction.

Principe général de dérivation et d'intégration numériques

Si

$$f(x) = P_n(x) + E_n(x)$$

alors

$$f'(x) = P'_n(x) + E'_n(x)$$

$$f''(x) = P''_n(x) + E''_n(x)$$

etc...

et aussi

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b P_n(x)dx + \int_a^b E_n(x)dx$$

Bonne estimation de la fonction

\Rightarrow Bonnes estimations de ses dérivées
et de son intégrale.

Dérivation du polynôme de Newton Grégory

$$f(x) = P_n(x) + E_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{s}{k} \Delta^k f_0 + \binom{s}{n+1} h^{n+1} f^{(n+1)}(\xi)$$

Dériver le polynôme :

$$\begin{aligned} \frac{dP_n(x)}{dx} &= \frac{dP_n(x)}{ds} \frac{ds}{dx} = \frac{dP_n(x)}{ds} \frac{1}{h} \quad \text{car } x = x_0 + sh \\ &= \frac{1}{h} \frac{d}{ds} \left\{ \sum_{k=0}^n \binom{s}{k} \Delta^k f_0 \right\} = \frac{1}{h} \sum_{k=0}^n \frac{d}{ds} \left\{ \binom{s}{k} \Delta^k f_0 \right\} \\ &= \frac{1}{h} \left[\begin{aligned} &\Delta f_0 + \frac{1}{2}(2s-1)\Delta^2 f_0 + \\ &\frac{1}{6}[(s-1)(s-2) + s(s-2) + s(s-1)]\Delta^3 f_0 + \dots \end{aligned} \right] \end{aligned}$$

Dérivée de l'erreur :

$$\begin{aligned} \frac{dE_n(x_0)}{dx} &= \frac{1}{h} \frac{d}{ds} \binom{s}{n+1} h^{n+1} f^{(n+1)}(\mathbf{x}) \\ &\quad + \binom{s}{n+1} h^{n+1} \frac{d}{dx} f^{(n+1)}(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

Note : le terme $f^{(n+1)}(\xi)$ dépend de x .

Dérivation du polynôme de Newton Grégory

Pour $s = 0, 1, \dots, n$
les formules se simplifient.

Pour ($s = 0$) :

$$P'_n(x_0) = \frac{1}{h} \left[\begin{aligned} &\Delta f_0 + \frac{1}{2}(2s-1)\Delta^2 f_0 + \\ &\frac{1}{6}[(s-1)(s-2) + s(s-2) + s(s-1)]\Delta^3 f_0 + \dots \end{aligned} \right]$$

$$= \frac{1}{h} \left[\begin{aligned} &\Delta f_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 f_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 f_0 - \frac{1}{4}\Delta^4 f_0 + \dots \\ &-\frac{(-1)^n}{n}\Delta^n f_0 \end{aligned} \right]$$

et le terme d'erreur est :

$$\frac{dE_n(x_0)}{dx} = \frac{1}{h} \frac{d}{ds} \binom{s}{n+1} h^{n+1} f^{(n+1)}(\mathbf{x})$$

$$+ \binom{s}{n+1} h^{n+1} \frac{d}{dx} f^{(n+1)}(\mathbf{x})$$

$$E'_n(x_0) = \frac{(-1)^n}{n+1} h^n f^{(n+1)}(\xi) \quad \text{terme qui est en } O(h^n)$$

Exemple :

Table de $f(x) = e^x$ à 3 décimales :

x	f(x)	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$
1.3	3.669				
		0.813			
1.5	4.482		0.179		
		0.992		0.041	
1.7	5.474		0.220		0.007
		1.212		0.048	
1.9	6.686		0.268		0.012
		1.480		0.060	
2.1	8.166		0.328		0.012
		1.808		0.072	
2.3	9.974		0.400		
		2.208			
2.5	12.182				

Ici $h = 0.2$

Approximations de la
dérivée en $x = 1.7$

$$P'_1(1.7) = \frac{1}{0.2} 1.212 = 6.606$$

$$P'_2(1.7) = \frac{1}{0.2} (1.212 - \frac{1}{2} 0.268) = 5.390$$

Erreur sur P'_1 :

$$E'_1(x) = -\frac{1}{2} (0.2)^1 f''(\xi)$$

$$-0.669 \leq E'_1(1.7) \leq -0.547$$

$x=1.7$ $x=1.9$

Erreur sur P'_2 :

$$E'_2(x) = \frac{1}{3} (0.2)^2 f'''(\xi)$$

$$0.073 \leq E'_2(1.7) \leq 0.109$$

$x=1.7$ $x=2.1$

Dérivation du polynôme de Newton Grégory

Pour $s = 0, 1, \dots, n$
les formules se simplifient.

Cas particulier ($s = 1$, polynôme de degré 2) :

$$P'_2(x_1) = \frac{1}{h} \left(\Delta f_0 + \frac{1}{2} \Delta^2 f_0 \right)$$

et le terme d'erreur est :

$$E'_n(x_1) = \frac{1}{6} h^2 f'''(\xi) \quad \text{terme qui est en } O(h^2)$$

Simplification :

$$f'(x_1) \approx P'_2(x_1) = \frac{f_2 - f_0}{2h}$$

Après translation d'indice :

$$f'(x_0) \approx \frac{f_1 - f_{-1}}{2h}$$

Formule centrée

Formules de calcul des dérivées

Dérivée première :

$$f'(x_0) = \frac{f_1 - f_0}{h} + O(h)$$

$$f'(x_0) = \frac{f_1 - f_{-1}}{2h} + O(h^2) \quad (\text{différences centrées})$$

$$f'(x_0) = \frac{-f_2 + 4f_1 - 3f_0}{2h} + O(h^2)$$

$$f'(x_0) = \frac{-f_2 + 8f_1 - 8f_{-1} + f_{-2}}{12h} + O(h^4) \quad (\text{différences centrées})$$

Dérivée seconde :

$$f''(x_0) = \frac{f_2 - 2f_1 + f_0}{h^2} + O(h)$$

$$f''(x_0) = \frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2} + O(h^2) \quad (\text{différences centrées})$$

$$f''(x_0) = \frac{-f_3 + 4f_2 - 5f_1 + 2f_0}{h^2} + O(h^2)$$

$$f''(x_0) = \frac{-f_2 + 16f_1 - 30f_0 + 16f_{-1} - f_{-2}}{12h^2} + O(h^4) \quad (\text{différences centrées})$$

$$\text{Dérivées d'ordre supérieur : } f^n(x_0) = \frac{\Delta^n f_0}{h^n} + O(h)$$

Instabilité de la différentiation numérique (propagation des erreurs)

$$f'(x_0) = \frac{f_1 - f_{-1}}{2h} + O(h^2)$$

$h \rightarrow 0$ alors erreur $\rightarrow 0$ et f' exacte.

Erreurs sur les valeurs de la fonction

$$\begin{aligned} f_{-1} &= f_{-1}^* \pm e_{-1} \\ f_1 &= f_1^* \pm e_1 \end{aligned}$$

alors

$$f'(x_0) = \frac{f_1^* - f_{-1}^*}{2h} \pm \frac{e_1 + e_{-1}}{2h} + O(h^2)$$

Si le pas h est trop réduit \Rightarrow
Beaucoup d'erreur d'arrondi

\therefore La dérivation est un processus instable
(soustraction entre termes voisins)

Calculs en double précision ?

Utile si e est une erreur machine (arrondi ou troncature).
Inutile si e est une erreur sur les données.

Utilisation des séries de Taylor (pour reconstruire les formules de dérivation)

au voisinage de $x = x_0$, nous avons :

$$x_1 = x_0 + h \quad f(x_1) = f_1 = f_0 + h f'_0 + \frac{h^2}{2} f''_0 + \frac{h^3}{6} f'''_0 + \frac{h^4}{24} f^{iv}_0 + \dots$$

$$x_{-1} = x_0 - h \quad f(x_{-1}) = f_{-1} = f_0 - h f'_0 + \frac{h^2}{2} f''_0 - \frac{h^3}{6} f'''_0 + \frac{h^4}{24} f^{iv}_0 + \dots$$

Reconstruire la formule f'_0 :

$$f'(x_0) = \frac{f_1 - f_{-1}}{2h} + O(h^2)$$

Soustraire les deux séries :

$$f_1 - f_{-1} = 2h f'_0 + \frac{h^3}{3} f'''_0 + \frac{h^5}{60} f^{v}_0 + \dots$$

Diviser par $2h$ et isoler f'_0 :

$$f'_0 = \frac{f_1 - f_{-1}}{2h} + \frac{h^2}{6} f'''_0 + \frac{h^4}{120} f^{v}_0 + \dots$$

Note : Série représentant l'erreur = puissances paires de h
seulement.

L'extrapolation de Richardson gagnera 2 ordres.

Utilisation des séries de Taylor (pour reconstruire les formules de dérivation)

au voisinage de $x = x_0$.

$$x_1 = x_0 + h \quad f(x_1) = f_1 = f_0 + h f'_0 + \frac{h^2}{2} f''_0 + \frac{h^3}{6} f'''_0 + \frac{h^4}{24} f^{iv}_0 + \dots$$

$$x_{-1} = x_0 - h \quad f(x_{-1}) = f_{-1} = f_0 - h f'_0 + \frac{h^2}{2} f''_0 - \frac{h^3}{6} f'''_0 + \frac{h^4}{24} f^{iv}_0 + \dots$$

Reconstruire les formules pour f'_0, f''_0, \dots

$$f'(x_0) = \frac{f_1 - f_{-1}}{2h} + O(h^2)$$

$$f''(x_0) = \frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2} + O(h^2)$$

Avec d'autres expansions :

$$f(x_2) = f_2 = f_0 + 2h f'_0 + 2h^2 f''_0 + \frac{4h^3}{3} f'''_0 + \frac{2h^4}{3} f^{iv}_0 + \dots$$

$$f(x_{-2}) = f_{-2} = f_0 - 2h f'_0 + 2h^2 f''_0 - \frac{4h^3}{3} f'''_0 + \frac{2h^4}{3} f^{iv}_0 + \dots$$

Reconstruire des formules plus complexes :

$$f''(x_0) = \frac{-f_2 + 16f_1 - 30f_0 + 16f_{-1} - f_{-2}}{12h^2} + O(h^4)$$

Ordre d'une approximation

$f(x)$ est d'ordre n au voisinage de 0 si

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{f(x)}{x^n} \right| \leq M$$

Où M est une constante.

La notation employée est

$$f(x) = O(x^n)$$

Remarque : On devrait plutôt dire $f(x)$ appartient à $O(x^n)$.

Exemple :

$$f(x) = \sin(x)$$

on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{\sin(x)}{x} \right| = 1$$

$$\text{donc } \sin(x) = O(x).$$

Il faut noter que :

$$\begin{aligned} O(1) &\supseteq O(x) \supseteq O(x^2) \supseteq \dots \\ &\supseteq O(x^n) \supseteq O(x^{n+1}) \supseteq \dots \end{aligned}$$

Remarque :

- On a toujours

$$O(h^n) = c_n h^n + c_{n+1} h^{n+1} + \dots$$

- Un terme d'erreur $O(h^n)$ signifie approximativement que :

Si on divise h par 2,
on divise le terme d'erreur
par 2^n .

en effet on a :

$$c_n \left(\frac{h}{2} \right)^n = \frac{1}{2^n} c_n h^n$$

Extrapolation de Richardson

- Pas = h

$$\begin{aligned}f(x) &= f_1(x) + O(h^n) \\ &= f_1(x) + Kh^n + O(h^{n+1})\end{aligned}$$

- Pas = 2 h

$$\begin{aligned}f(x) &= f_2(x) + O((2h)^n) \\ &= f_2(x) + 2^n Kh^n + O((2h)^{n+1})\end{aligned}$$

Alors

$$f(x) = f_1(x) + \frac{1}{2^n - 1} (f_1(x) - f_2(x)) + O(h^{n+1})$$

Précision amélioré d'un ordre

Méthode valable pour :

- Interpolation
- Dérivation numérique
- Intégration numérique

Extrapolation de Richardson

Démonstration

$$(1) \rightarrow f(x) - f_h(x) = c_n h^n + c_{n+1} h^{n+1} + \dots$$

$$(2) \rightarrow f(x) - f_{2h}(x) = c_n (2h)^n + c_{n+1} (2h)^{n+1} + \dots$$

$$= c_n 2^n h^n +$$

$$2^n * (1) - (2) \Rightarrow$$

$$2^n f(x) - 2^n f_h(x) - f(x) + f_{2h}(x) = O(h^{n+1})$$

$$(2^n - 1)f(x) - (2^n - 1)f_h(x) - f_h(x) + f_{2h}(x) = O(h^{n+1})$$

$$(2^n - 1)\{f(x) - f_h(x)\} = f_h(x) - f_{2h}(x) + O(h^{n+1})$$

$$f(x) - f_h(x) = \frac{1}{2^n - 1} \{f_h(x) - f_{2h}(x)\} + O(h^{n+1})$$

$$f(x) = f_h(x) + \frac{1}{2^n - 1} \{f_h(x) - f_{2h}(x)\} + O(h^{n+1})$$

Exemple :

Dérivée première en $x = 2.5$
de

x	f(x)
2.3	0.34718
2.4	0.31729
2.5	0.28587
2.6	0.25337
2.7	0.22008

Différences centrées :

- $h = 0.1$

$$\begin{aligned}f'(2.5) &= (f_1 - f_{-1})/2h + O(h^2) \\&= (0.25337 - 0.31729)/0.2 + \\&\quad O(h^2) \\&= -0.3196 + O(h^2)\end{aligned}$$

- $2h = 0.2$

$$\begin{aligned}f'(2.5) &= (f_2 - f_{-2})/2h + O(4h^2) \\&= (0.22008 - 0.34718)/0.4 + \\&\quad O(4h^2) \\&= -0.3178 + O(4h^2)\end{aligned}$$

Note :

L'extrapolation de
Richardson peut être
appliquée plusieurs fois.

f_h

f_{2h}

f_{4h}

Technique d'extrapolation

$$\begin{aligned}f'(2.5) &= -0.3196 \\&\quad + \{ -0.3196 - (-0.3178) \}/3 + \\&\quad O(h^4) \\&= -0.3203 + O(h^4)\end{aligned}$$

Amélioration de 2 ordres.

Ift 2421

Chapitre 5

Intégration numérique

Intégration numérique

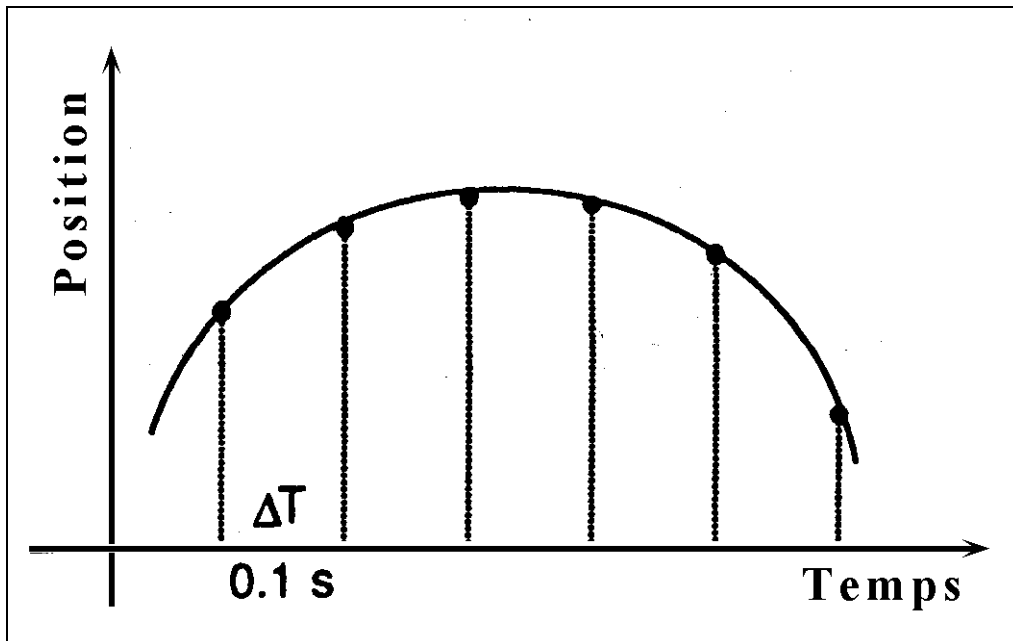
$n+1$ points de collocation

$$\begin{array}{ccccccccc} x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ f_0 & f_1 & f_2 & \dots & f_n \end{array}$$

Approcher l'intégrale de la fonction

$$\int_a^b f(x) dx$$

Surface sous la courbe entre a et b



Intégration numérique (Quadrature de Newton Cotes)

Polynôme $P_n(x)$ de Newton Gregory

$$\begin{array}{ccccccccc} x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ f_0 & f_1 & f_2 & \dots & f_n \end{array}$$

L'intégrale du polynôme et de l'erreur est :

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_n} P_n(x)dx + \int_{x_0}^{x_n} E_n(x)dx$$

Quadrature simple du trapèze

(formule de Newton Cotes pour $n = 1$)
Polynôme $P_n(x)$ de degré 1

$$\int_{x_0}^{x_1} P_1(x) dx = h \int_0^1 P_1(s) ds$$

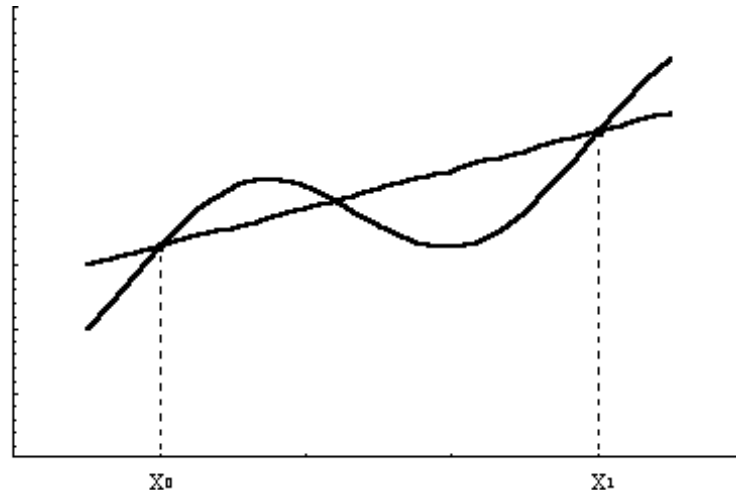
Formule d'erreur :

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} P_1(x) dx &= h \left[s f_0 + \frac{s^2}{2} \Delta f_0 \right]_{s=0}^{s=1} \\ &= h \left[f_0 + \frac{f_1 - f_0}{2} \right] \end{aligned}$$

$$\int_{x_0}^{x_1} P_1(x) dx = \frac{h}{2} [f_0 + f_1]$$

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} E_1(x) dx &= h^3 f''(\mathbf{x}_1) \int_0^1 \left(\frac{s}{2} \right) ds \\ &= h^3 f''(\mathbf{x}_1) \int_0^1 \frac{s(s-1)}{2} ds \\ &= h^3 f''(\mathbf{x}_1) \left(-\frac{1}{12} \right) \end{aligned}$$

Surface sous le trapèze.



Méthode de Simpson 1/3

(quadrature simple)

Polynôme $P_n(x)$ de degré 2

$$\int_{x_0}^{x_2} P_2(x) dx = h \int_0^2 P_2(s) ds$$

$$= \frac{h}{3} [f_0 + 4f_1 + f_2]$$

Formule d'erreur :

Remarque :

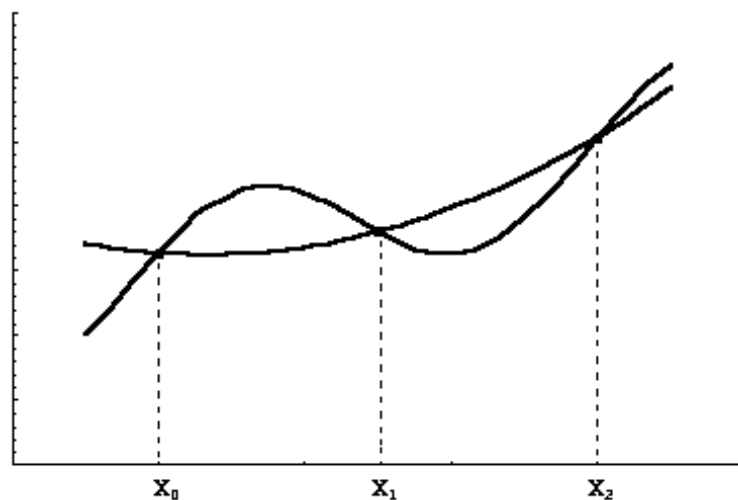
$$\int_0^2 \binom{s}{3} ds = 0$$

Nous gagnons alors un ordre pour l'erreur

$$\int_{x_0}^{x_2} E_2(x) dx = h^5 f^{iv}(\xi_1) \int_0^2 \binom{s}{4} ds$$

$$= h^5 f^{iv}(\xi_1) \left(-\frac{1}{90} \right)$$

Surface sous la parabole.



Méthode de Simpson 3/8 (quadrature simple)

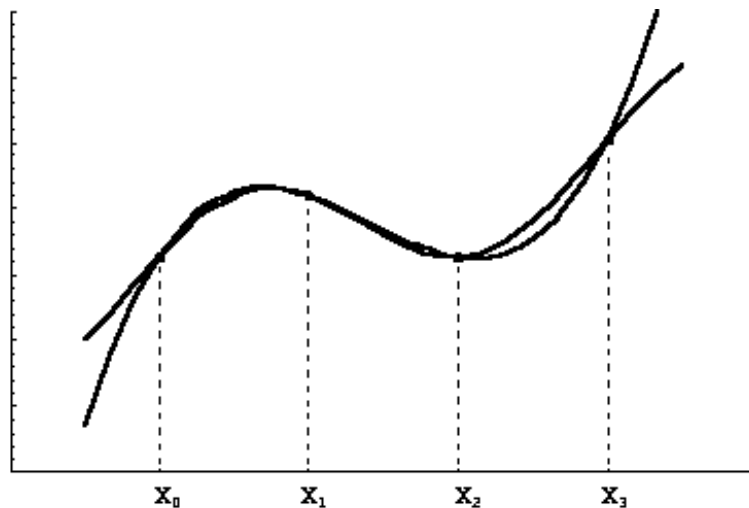
Polynôme $P_n(x)$ de degré 3

$$\int_{x_0}^{x_3} P_3(x) dx = h \int_0^3 P_3(s) ds$$

Formule d'erreur :

$$\begin{aligned} &= \frac{3}{8} h [f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3] & \int_{x_0}^{x_3} E_3(x) dx &= h^5 f^{iv}(\xi_1) \int_0^3 \left(\frac{s}{4}\right) ds \\ & & &= h^5 f^{iv}(\xi_1) \left(-\frac{3}{80}\right) \end{aligned}$$

Pas de gain en pratique.



Exemple :

x	f(x) = x³
0	0
1	1
2	8
3	27
4	64
5	125
6	216

Calculer

$$\int_0^6 f(x) dx$$

Règle du trapèze

$$(n = 1) \quad h = 6$$

$$\begin{aligned}\int_0^6 f(x) dx &\approx \frac{6}{2}(f_0 + f_6) \\ &= \frac{6}{2}(0 + 216) \\ &= 648\end{aligned}$$

Simpson 1/3

$$(n = 2) \quad h = 3$$

$$\begin{aligned}\int_0^6 f(x) dx &\approx \frac{3}{3}(f_0 + 4f_3 + f_6) \\ &= \frac{3}{3}(0 + 4 * 27 + 216) \\ &= 324\end{aligned}$$

Simpson 3/8

$$(n = 3) \quad h = 2$$

$$\begin{aligned}\int_0^6 f(x) dx &\approx \frac{3 * 2}{8}(f_0 + 3f_2 + 3f_4 + f_6) \\ &= \frac{3}{4}(0 + 3 * 8 + 3 * 64 + 216) \\ &= 324\end{aligned}$$

Note :

$$\int_0^6 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^6$$

Remarque :

Assuré d'avoir la bonne
réponse car $P_3(x)$

Quadratures Simples

Résumé :

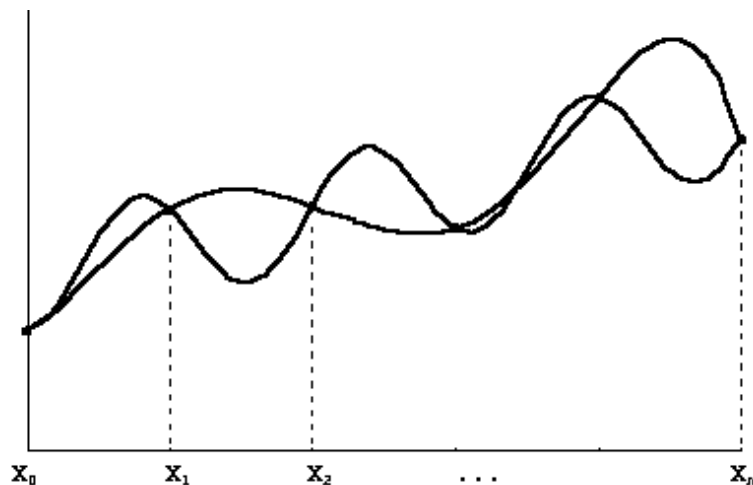
- **La règle du trapèze** ($n=1$)
Terme d'erreur d'ordre 3

Intègre exactement un polynôme de degré un
puisque $f'(\xi_1) = 0$ dans ce cas.

- **Les règles de Simpson** (1/3 et 3/8)
donnent un terme d'erreur d'ordre 5

Intègrent exactement un polynôme de degré 3
puisque $f^{iv}(\xi_1) = 0$ dans ce cas.

Problèmes :



Quadratures composites

2 étapes :

1. Construction d'une succession de polynômes de Newton Grégory mis bout à bout.
2. Addition des surfaces sous chacun des polynômes de la représentation

Construction par morceaux
chaque morceau = quadrature simple

Nous parlons alors de quadratures composites.

Quadrature composite du trapèze

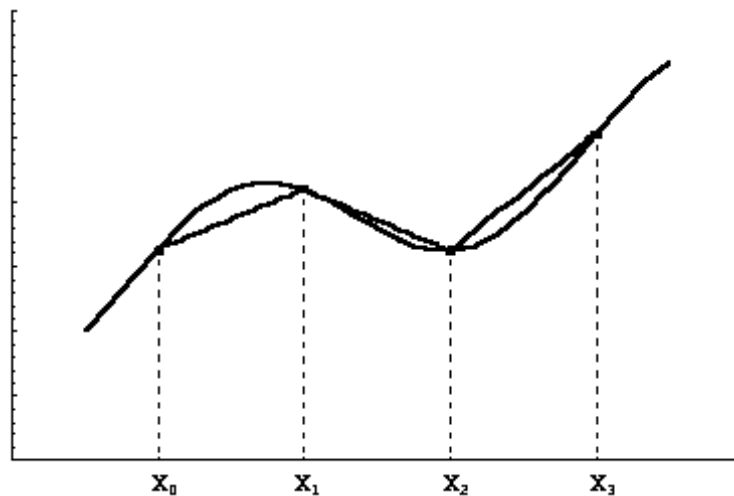
L'aire de chaque trapèze est :

$$T_i = \frac{h}{2}(f_i + f_{i-1}) \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n$$

h est constant = les intervalles sont égaux.

La règle composite du trapèze est :

$$\begin{aligned} A(f) &= \int_{x_0}^{x_n} f(x) dx = \sum_{i=1}^n T_i = \frac{h}{2} \sum_{i=1}^n (f_i + f_{i-1}) \\ &= \frac{h}{2} \{f_0 + 2f_1 + 2f_2 + 2f_3 + \dots + 2f_{n-1} + f_n\} \end{aligned}$$



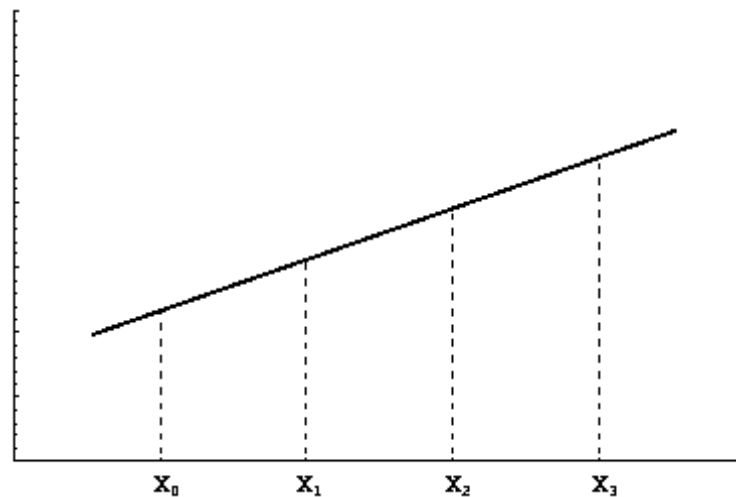
Erreur sur la quadrature composite du trapèze

L'erreur $E(f) = I(f) - A(f)$ sur l'intégrale est :

$$\begin{aligned} E(f) &= \frac{-h^3}{12} \sum_{i=1}^n f''(\xi_i) \quad \text{avec } x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i \\ &= \frac{-h^2}{12} (x_n - x_0) \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f''(\xi_i) \\ &= \frac{-h^2}{12} (x_n - x_0) f''(\xi) \quad \text{avec } x_0 \leq \xi \leq x_n \end{aligned}$$

Remarque :

Si $f(x)$ est un polynôme de degré 1 alors $A(f) = I(f)$
car $f''(x) = 0$.

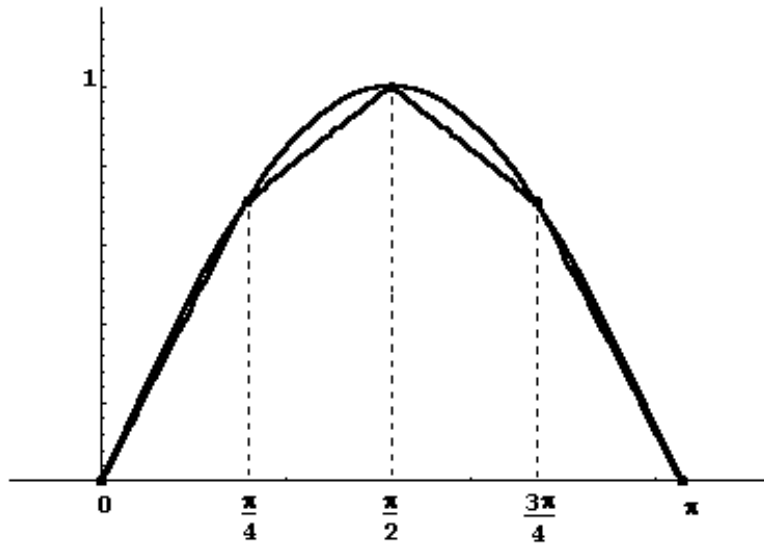


Exemple :

- Approximez $I = \int_0^{\pi} \sin(x) dx$ avec $h = \frac{\pi}{4}$

Valeur exacte : $I = \int_0^{\pi} \sin(x) dx = [-\cos(x)]_0^{\pi} = 2$

$$A_{h=\frac{\pi}{4}} = h \left(\frac{1}{2} f_0 + f_1 + f_2 + f_3 + \frac{1}{2} f_4 \right)$$



$$A_{h=\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} (1 + \sqrt{2}) \approx 1.896$$

$$E = \frac{-h^2}{12} (x_n - x_0) f''(\xi) \quad \text{avec } 0 \leq \xi \leq \pi$$

$$|E| = \frac{\pi^3}{192} |\sin(\xi)| \leq \frac{\pi^3}{192} \approx 0.16149 \quad \text{avec } 0 \leq \xi \leq \pi$$

$$E_{reelle} = I - A_{h=\frac{\pi}{4}} = 2 - \frac{\pi}{4} (1 + \sqrt{2}) \approx 2 - 1.896 \approx 0.1038$$

Exemple (suite) :

Remarque :

Nous pouvons utiliser la formule de l'erreur
pour définir la largeur d'un intervalle :

Comment choisir h pour que l'erreur d'intégration
obtenue sur $I = \int_0^\pi \sin(x) dx$ par la méthode composite
des trapèzes soit plus petite que 0.0005 ?

$$E = \frac{-h^2}{12} (x_n - x_0) f''(\xi) \quad \text{avec} \quad 0 \leq \xi \leq \pi$$

$$|E| = \frac{\pi}{12} h^2 |\sin(\xi)| \leq \frac{\pi}{12} h^2 \leq 0.0005$$

$$\Leftrightarrow$$

$$h^2 \leq \frac{12}{\pi} 0.0005$$

$$\Leftrightarrow$$

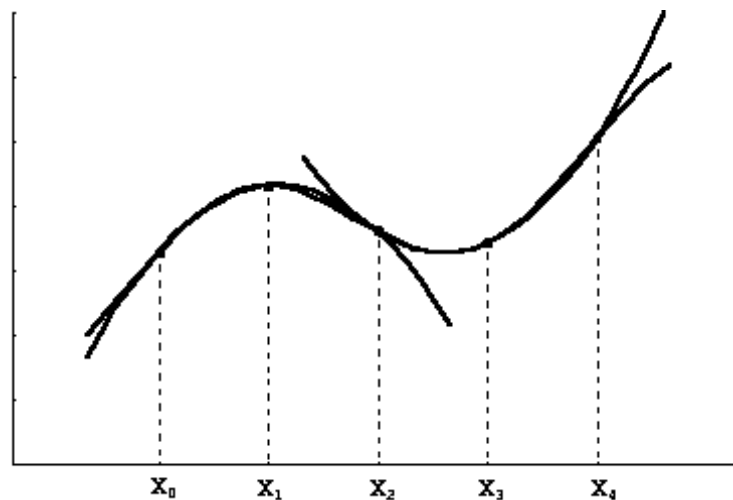
$$h \leq 0.044$$

$$n > \frac{\pi}{0.044} \approx 71.8$$

Donc $n \geq 72$ intervalles.

Quadrature composite de Simpson 1/3

Nombre pair d'intervalles = nombre impair de points
 $nb = 2m+1$



Sur chaque paire de sous intervalles,
la courbe est remplacée par une parabole.

Pour chaque triplet de valeurs :

$$S_i = \frac{h}{3}(f_{2i-2} + 4f_{2i-1} + f_{2i}) \quad 1 \leq i \leq m$$

La règle composite de Simpson 1/3
pour trouver l'intégrale $I(f)$ est :

$$\begin{aligned} A(f) &= \int_{x_0}^{x_{2m}} f(x)dx = \sum_{i=1}^m S_i = \frac{h}{3} \sum_{i=1}^m (f_{2i-2} + 4f_{2i-1} + f_{2i}) \\ &= \frac{h}{3} \{ f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \dots + 4f_{n-1} + f_n \} \end{aligned}$$

Erreur de troncature globale pour Simpson 1/3

$$E = E_1 + E_2 + \dots + E_{n/2}$$

$$E = -\frac{h^5}{90} \left(\frac{f^{iv}(\xi_1) + f^{iv}(\xi_2) + \dots + f^{iv}(\xi_{n/2})}{n/2} \right) n/2$$

$$E = -\frac{h^5}{180} n f^{iv}(\xi) = -\frac{1}{180} (b-a) h^4 f^{iv}(\xi) = -\frac{1}{180} \frac{(b-a)^5}{n^4} f^{iv}(\xi)$$

Remarque :

- Si $f(x)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à 3
alors $A = I$.

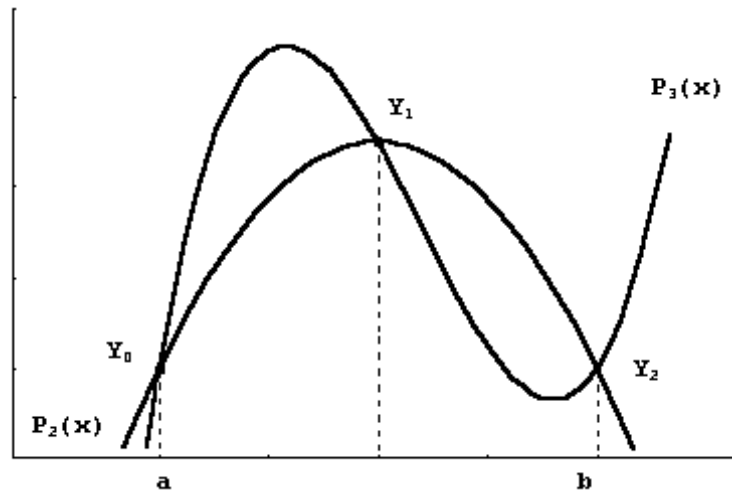
$$E = 0 \text{ car } f^{iv}(\xi) = 0$$

- $E = O(h^4)$

Si nous doublons le nombre de sous intervalles
alors l'erreur est coupée par un facteur de ≈ 16 .

Remarque :

3 points



Le polynôme de degré 2, $P_2(x)$, est passant par ces 3 points est unique.

Mais, il y a une infinité de polynômes de degré 3, (cubiques $P_3(x)$) passant par 3 points donnés

$$\int_a^b P_2(x) = \int_a^b P_3(x) = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

où $P_3(x)$ est une cubique quelconque

Preuve (exercice)

Quadrature composite de Simpson 3/8

Sur chaque triplet de sous intervalles,
la courbe est remplacée par une cubique.

Pour chaque 4uplet de valeurs :

$$S_i = \frac{3}{8}h(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3)$$

La règle composite de Simpson 3/8
pour trouver l'intégrale I(f) est :

$$\begin{aligned} A(f) &= \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \\ &= \frac{3}{8}h\{f_0 + 3f_1 + 3f_2 + 2f_3 + \dots + 2f_{n-3} + 3f_{n-2} + 3f_{n-1} + f_n\} \end{aligned}$$

Erreur de troncature globale pour Simpson 3/8

$$E = E_1 + E_2 + \dots + E_{n/3} \quad (n = 3k)$$

$$E = -\frac{3}{80}h^5 \left(\frac{f^{iv}(\xi_1) + f^{iv}(\xi_2) + \dots + f^{iv}(\xi_{n/3})}{n/3} \right) n/3$$

$$E = -\frac{h^5}{80}n f^{iv}(\xi) = -\frac{(b-a)}{80}h^4 f^{iv}(\xi) = -\frac{1}{80} \frac{(b-a)^5}{n^4} f^{iv}(\xi)$$

L'ordre de l'erreur est le même que pour Simpson 1/3 : $O(h^4)$

Intégration de Romberg

Méthode qui utilise :

La quadrature composite du trapèze
et la technique d'extrapolation de Richardson.

$$I = \int_a^b f(x)dx = T_n + E$$

$$T_n = \frac{h}{2} \{f_0 + 2f_1 + 2f_2 + 2f_3 + \dots + 2f_{n-1} + f_n\}$$

$$T_n - I = \frac{(b-a)}{12} h^2 f''(\xi) \quad a \leq \xi \leq b$$

$$a_2 h^2 + a_4 h^4 + a_6 h^6 + a_8 h^8 + \dots \quad (*)$$

* Formule d'Euler Maclaurin
où les coefficient a_j sont indépendants de h .

La méthode de Romberg consiste à appliquer le procédé d'extrapolation de Richardson à la formule d'Euler Maclaurin.

C'est une amélioration de la méthode composite du trapèze.

Intégration de Romberg

$$n = 2^m$$

Définition :

$T_{i,n}$ = Valeur de la quadrature composite
à l'étape i pour n sous domaines.

1. Première étape :

Calcul des quadratures composites :

$$T_{1,n} = \frac{h}{2} \{f_0 + 2f_1 + 2f_2 + 2f_3 + \dots + 2f_{n-1} + f_n\}$$

$$T_{1,\frac{n}{2}} = \frac{2h}{2} \{f_0 + 2f_2 + \dots + 2f_{n-2} + f_n\}$$

$$T_{1,\frac{n}{4}} = \frac{4h}{2} \{f_0 + 2f_4 + \dots + 2f_{n-4} + f_n\}$$

$$T_{1,\frac{n}{8}} = \frac{8h}{2} \{f_0 + 2f_8 + \dots + 2f_{n-8} + f_n\}$$

etc...

$$\begin{aligned}
I &= \int_a^b f(x)dx = T_{1,n} + O(h^2) \\
&= T_{1,\frac{n}{2}} + O((2h)^2) \\
&= T_{1,\frac{n}{4}} + O((4h)^2) \\
&\text{etc...}
\end{aligned}$$

$T_{1,n}$		
	$T_{2,n/2}$	
$T_{1,n/2}$		$T_{3,n/4}$
	$T_{2,n/4}$	
$T_{1,n/4}$		
$O(h^2)$	$O(h^4)$	$O(h^6)$

2. Deuxième étape :
1^{ère} Extrapolation de Richardson

$$\begin{aligned}
T_{2,\frac{n}{2}} &= T_{1,n} + \frac{1}{2^2 - 1} \left(T_{1,n} - T_{1,\frac{n}{2}} \right) \\
T_{2,\frac{n}{4}} &= T_{1,\frac{n}{2}} + \frac{1}{2^2 - 1} \left(T_{1,\frac{n}{2}} - T_{1,\frac{n}{4}} \right) \\
T_{2,\frac{n}{8}} &= T_{1,\frac{n}{4}} + \frac{1}{2^2 - 1} \left(T_{1,\frac{n}{4}} - T_{1,\frac{n}{8}} \right) \\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

Nous avons alors:

$$\begin{aligned}
I &= \int_a^b f(x)dx = T_{2,\frac{n}{2}} + O(h^4) \\
&= T_{2,\frac{n}{4}} + O((2h)^2) \\
&\text{etc...}
\end{aligned}$$

3. Troisième étape :
2^{ème} Extrapolation de Richardson

$$\begin{aligned}
T_{3,\frac{n}{4}} &= T_{2,\frac{n}{2}} + \frac{1}{2^4 - 1} \left(T_{2,\frac{n}{2}} - T_{2,\frac{n}{4}} \right) \\
T_{3,\frac{n}{8}} &= T_{2,\frac{n}{4}} + \frac{1}{2^4 - 1} \left(T_{2,\frac{n}{4}} - T_{2,\frac{n}{8}} \right) \\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

Nous avons alors:

$$\begin{aligned}
I &= \int_a^b f(x)dx = T_{3,\frac{n}{4}} + O(h^6) \\
&= T_{3,\frac{n}{8}} + O((2h)^6) \\
&\text{etc...}
\end{aligned}$$

Nouvelles itérations possibles

Intégration de Romberg

Nous avons donc comme formule générale:

$$T_{k+1, \frac{n}{2}} = \frac{1}{4^k - 1} (4^k T_{k,n} - T_{k, n/2})$$

Remarque:

Après la première étape d'extrapolation,
la méthode de Romberg est donne
la méthode de Simpson 1/3.

$$\text{1 intervalle de longueur } 2h \quad T_{1,1} = 2h \left(\frac{1}{2} f_0 + \frac{1}{2} f_2 \right)$$

$$\text{2 intervalle de longueur } h \quad T_{1,2} = h \left(\frac{1}{2} f_0 + f_1 + \frac{1}{2} f_2 \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{4T_{1,2} - T_{1,1}}{3} &= \frac{h}{3} (2f_0 + 4f_1 + 2f_2 - f_0 - f_2) \\ &= \frac{h}{3} (f_0 + 4f_1 + f_2) \end{aligned}$$

Exemple :

Calculer une valeur approchée de I par la méthode de Romberg.
entre 0.0 et 0.8

x	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8
f(x)	0.000	0.199	0.389	0.565	0.717

Attention :

1. Première étape :

Calcul des quadratures composites :

$$n=4 \quad T_{1,4} = \frac{h}{2} \{f_0 + 2f_1 + 2f_2 + 2f_3 + f_4\}$$

$$T_{1,4} = \frac{0.2}{2} \{0 + 2 * 0.199 + 2 * 0.389 + 2 * 0.565 + 0.717\}$$

$$T_{1,4} = 0.3023$$

$$n=2 \quad T_{1,2} = \frac{2h}{2} \{f_0 + 2f_2 + f_4\}$$

$$T_{1,2} = \frac{2h}{2} \{0 + 2 * 0.389 + 0.717\}$$

$$T_{1,2} = 0.299$$

$$n=1 \quad T_{1,1} = \frac{4h}{2} \{0 + 0.717\}$$

$$T_{1,1} = 0.2868$$

Ordre de l'erreur $O(h^2)$

2. Deuxième étape :

1^{ère} Extrapolation de Richardson

$$T_{2,2} = T_{1,4} + \frac{1}{2^2 - 1} (T_{1,4} - T_{1,2})$$

$$T_{2,2} = 0.3023 + \frac{1}{2^2 - 1} (0.3023 - 0.299)$$

$$T_{2,2} = 0.3034$$

$$T_{2,1} = T_{1,2} + \frac{1}{2^2 - 1} (T_{1,2} - T_{1,1})$$

$$T_{2,1} = 0.299 + \frac{1}{2^2 - 1} (0.299 - 0.2868)$$

$$T_{2,1} = 0.303066$$

Ordre de l'erreur $O(h^4)$

3. Troisième étape :

2^{ème} Extrapolation de Richardson

$$T_{3,1} = T_{2,2} + \frac{1}{2^4 - 1} (T_{2,2} - T_{2,1})$$

$$T_{3,1} = 0.3034 + \frac{1}{2^4 - 1} (0.3034 - 0.303066)$$

$$T_{3,1} = 0.3034222$$

Ordre de l'erreur $O(h^6)$

Méthode des Quadratures gaussiennes

Polynôme de Legendre

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

$$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$$

$$P_6(x) = \frac{1}{48}(693x^6 - 945x^4 + 315x^2 - 5)$$

Racines des polynômes de Legendre

Théorème:

$P_n(x)$ possède n racines réelles, toutes situées entre -1 et 1.

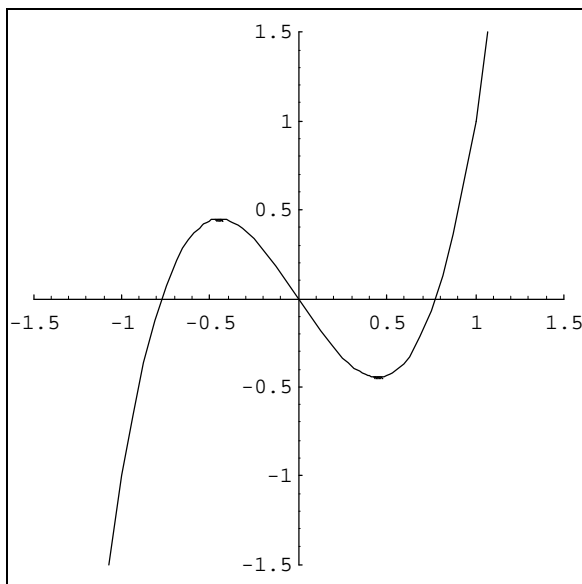
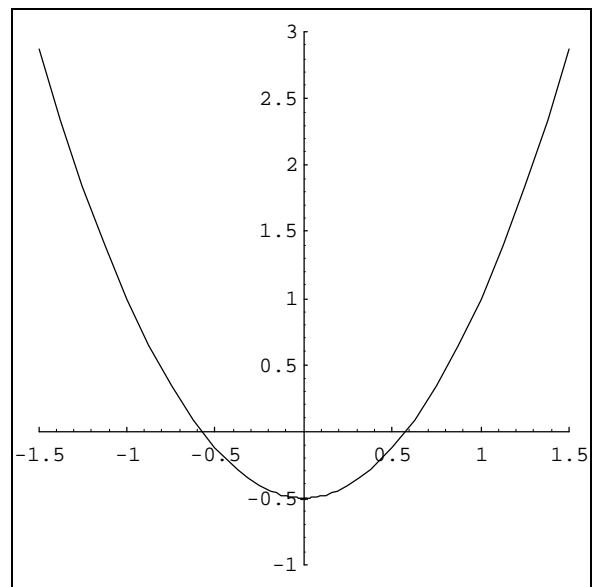
Exemple:

$$n = 1 \quad P_1(x) = x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$n = 2 \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$



$$n = 3 \quad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) = 0$$

$$\Leftrightarrow x(5x^2 - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm \sqrt{\frac{3}{5}} \end{cases}$$

Méthode des Quadratures gaussiennes

Théorème :

Si P est un polynôme de degré inférieur ou égale à $2n-1$, alors

$$\int_{-1}^1 P(t) dt = \sum_{i=1}^n w_i P(t_i)$$

$$\text{où } w_i = \int_{-1}^1 \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{t - t_j}{t_i - t_j} dt$$

et

$t_0, t_1, t_2, \dots, t_n$ sont les zéros du $n^{\text{ième}}$ polynôme de Legendre.

Exemple : Quadrature gaussienne avec 2 termes.

Soit $P(t)$ un polynôme quelconque de degré inférieur ou égal à 3.

$$\text{Posons : } \int_{-1}^1 P(t) dt = \omega_1 P(t_1) + \omega_2 P(t_2) \quad n=2$$

Trouvons $t_1, t_2, \omega_1, \omega_2$ pour que le membre de droite donne la valeur exacte de l'intégrale, quelque soit le polynôme de degré inférieur à 3 considéré.

Soit $P(t) = a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0$ a_0, a_1, a_2, a_3 quelconque.

$$\int_{-1}^1 (a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0) dt = \omega_1 (a_3 t_1^3 + a_2 t_1^2 + a_1 t_1 + a_0) \\ + \omega_2 (a_3 t_2^3 + a_2 t_2^2 + a_1 t_2 + a_0)$$

$$a_3(0) + a_2\left(\frac{2}{3}\right) + a_1(0) + a_0(2) = a_3(\omega_1 t_1^3 + \omega_2 t_2^3) + a_2(\omega_1 t_1^2 + \omega_2 t_2^2) \\ + a_1(\omega_1 t_1 + \omega_2 t_2) + a_0(\omega_1 + \omega_2)$$

$$(1) \quad \omega_1 t_1^3 + \omega_2 t_2^3 = 0$$

$$(2) \quad \omega_1 t_1^2 + \omega_2 t_2^2 = \frac{2}{3}$$

$$(3) \quad \omega_1 t_1 + \omega_2 t_2 = 0$$

$$(4) \quad \omega_1 + \omega_2 = 2$$

$$(1) \quad \omega_1 t_1^3 + \omega_2 t_2^3 = 0$$

$$(3) * t_1^2 \quad \omega_1 t_1^3 + \omega_2 t_2 t_1^2 = 0$$

$$(1) - (3) * t_1^2 \quad \omega_2 t_2 (t_2^2 - t_1^2) = 0$$

$$\omega_2 t_2 (t_2 - t_1)(t_2 + t_1) = 0$$

$$\omega_2 = 0 \text{ ou } t_2 = 0 \text{ ou } t_2 = t_1 \text{ ou } t_2 = -t_1$$

$$\int_{-1}^1 P(t) dt = P\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + P\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

Quel que soit le polynôme $P(t)$ de degré ≤ 3 .

Application :

Soit $f(t)$ quelconque et (Maclaurin) :

$$f(t) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}t + \frac{f''(0)}{2!}t^2 + \frac{f'''(0)}{3!}t^3 + R_4$$

$P(t)$ polynôme de degré 3.

$$f(t) = P(t) + R_4$$

$$f(t) \approx P(t)$$

$$\int_{-1}^1 f(t)dt \approx \int_{-1}^1 P(t)dt = P(t_1) + P(t_2)$$

$$\int_{-1}^1 f(t)dt \approx f(t_1) + f(t_2)$$

$$\int_{-1}^1 f(t)dt \approx f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

Quadrature gaussienne avec n termes

Soit $P(t)$ un polynôme quelconque de degré inférieur ou égal à $2n-1$.

$$\text{Posons : } \int_{-1}^1 P(t) dt = \omega_1 P(t_1) + \omega_2 P(t_2) + \dots + \omega_n P(t_n)$$

Trouvons $t_1, t_2, \dots, t_n, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ pour que le membre de droite donne la valeur exacte de l'intégrale, quelque soit le polynôme de degré inférieur à $2n-1$ considéré.

Application :

Soit $f(t)$ quelconque :

$$f(t) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}t + \frac{f''(0)}{2!}t^2 + \frac{f'''(0)}{3!}t^3 + \dots + \frac{f^{(2n-1)}(0)}{(2n-1)!}t^{2n-1} + R_{2n}$$

$P(t)$ polynôme de degré $2n-1$.

$$f(t) \approx P(t)$$

$$\int_{-1}^1 f(t) dt \approx \int_{-1}^1 P(t) dt = \omega_1 P(t_1) + \omega_2 P(t_2) + \dots + \omega_n P(t_n)$$

$$\int_{-1}^1 f(t) dt \approx \omega_1 f(t_1) + \omega_2 f(t_2) + \dots + \omega_n f(t_n)$$

Rappel :

- Dans la formule de Gauss à n termes, t_1, t_2, \dots, t_n sont les racines du polynôme de Legendre $P_n(t)$ de degré n.

$$\bullet \quad \omega_i = \int_{-1}^1 L_i(t) dt$$

où $L_i(t)$ sont les polynômes de base qui correspondent aux abscisses t_1, t_2, \dots, t_n dans la formule de Lagrange du polynôme de collocation.

Exemple : $n = 2$

$$\int_{-1}^1 f(t) dt \approx \omega_1 f(t_1) + \omega_2 f(t_2)$$

$$t_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad t_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$L_1(t) = \frac{(t - t_2)}{(t_1 - t_2)} = \frac{t - \frac{\sqrt{3}}{3}}{-\frac{\sqrt{3}}{3}} = -\frac{1}{2}(\sqrt{3} t - 1)$$

$$\omega_1 = \int_{-1}^1 L_1(t) dt = -\frac{1}{2} \int_{-1}^1 (\sqrt{3} t - 1) dt = -\frac{1}{2} \left[\frac{\sqrt{3}}{2} t^2 - t \right]_{-1}^1$$

$$\omega_1 = -\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \right) - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \right) \right]$$

$$\omega_1 =$$

Même chose pour ω_2

Nous allons donc construire une table contenant
 Pour différentes valeurs de n ,
 les racines du polynôme de Legendre de degré n
 et les valeurs des poids correspondants.

n	Racines	Coefficients
2	0.5773502692	1
	-0.5773502692	1
3	0.774596692	0.5555555556
	0	0.8888888889
	-0.774596692	0.5555555556
4	0.8611363116	0.3478548451
	0.3399810436	0.6521451549
	-0.3399810436	0.6521451549
	-0.8611363116	0.3478548451
5	0.9061798459	0.2369268850
	0.5384693101	0.4786286705
	0	0.5688888889
	-0.5384693101	0.4786286705
	-0.9061798459	0.2369268850

Remarque:

La fonction $f(x)$ doit être connue.

Application à un domaine d'intégration quelconque

$$I = \int_{x=a}^{x=b} g(x) dx$$

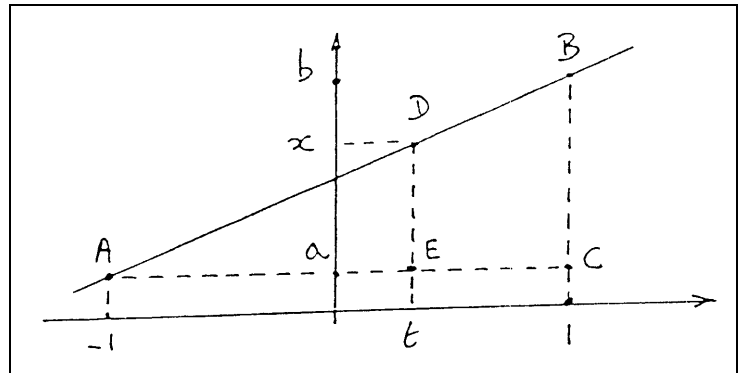
Effectuer un changement
de variable :

$$x = x(t)$$

tel que lorsque t varie de
-1 à 1

x varie de a à b .

$$dx = x'(t) dt$$



$$\frac{DE}{AE} = \frac{BC}{AC}$$

$$\frac{x - a}{t - (-1)} = \frac{b - a}{1 - (-1)}$$

$$x = \frac{(b - a)t + (a + b)}{2}$$

$$dx = \frac{(b - a)}{2} dt$$

$$I = \int_{x=a}^{x=b} g(x) dx = \frac{b - a}{2} \int_{t=-1}^{t=1} g(x(t)) dt = \frac{b - a}{2} \int_{-1}^1 f(t) dt$$

$$\approx \frac{b - a}{2} \{ \omega_1 f(t_1) + \omega_2 f(t_2) + \dots + \omega_n f(t_n) \}$$

$$\approx \frac{b - a}{2} \{ \omega_1 g(x(t_1)) + \omega_2 g(x(t_2)) + \dots + \omega_n g(x(t_n)) \}$$

$$\approx \frac{b - a}{2} \{ \omega_1 g(x_1) + \omega_2 g(x_2) + \dots + \omega_n g(x_n) \}$$

n choix de l'utilisateur.

Exemple :

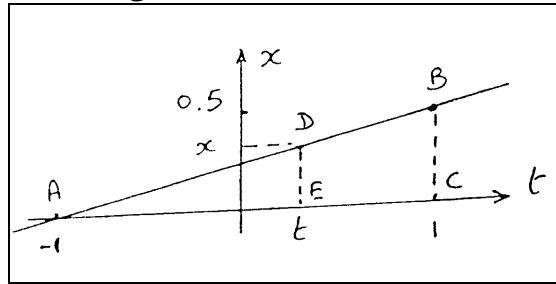
Calculer l'intégrale suivante par la méthode de Gauss à 3 termes :

$$I = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{0.5} e^{-x^2} dx$$

• Changement de variable :

$$\frac{DE}{AE} = \frac{BC}{AC}$$

$$\frac{x - a}{t + 1} = \frac{0.5}{2}$$



$$x = \frac{1}{4}(t + 1)$$

$$dx = \frac{1}{4} dt$$

$$I = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{0.5} e^{-x^2} dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{4} \int_{t=-1}^{t=1} e^{-\frac{1}{16}(t+1)^2} dt$$

$$I = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{t=-1}^{t=1} e^{-\frac{1}{16}(t+1)^2} dt$$

$$I \approx \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \{ \omega_1 f(t_1) + \omega_2 f(t_2) + \omega_3 f(t_3) \} = 0.520500184$$

$$f(t_1) = e^{-\frac{1}{16}(t_1+1)^2} = e^{-\frac{1}{16}(-0.77459667+1)^2} = 0.99682962$$

$$f(t_2) = e^{-\frac{1}{16}(t_2+1)^2} = e^{-\frac{1}{16}} = 0.939413062$$

$$f(t_3) = e^{-\frac{1}{16}(t_3+1)^2} = e^{-\frac{1}{16}(1.77459667)^2} = 0.821334696$$

Méthode des Quadratures gaussiennes

La méthode de Gauss est très utile.

Nécessite moins de calculs:

Exemple formule de Gauss à 2 termes:

$$\int_{-1}^1 P(t)dt = P\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + P\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

est exacte quelque soit $P(t)$ de degré inférieur ou égal à 3.

Pour avoir le même résultat avec Newton Cotes, il faut utiliser Simpson 1/3 ou 3/8 (Polynôme $P(x)$ de degré 3).

$$\int_a^b P_2(x) = \int_a^b P_3(x) = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

$$\int_{x_0}^{x_3} P_3(x)dx = \frac{3}{8}h[P_0 + 3P_1 + 3P_2 + P_3]$$

Il y a 3 ou 4 termes à évaluer !
Seulement 2 pour la méthode de Gauss.

Problème:

Si la fonction est inconnue \Leftrightarrow Nous avons une table.

Méthode des coefficients indéterminés

Si la fonction est inconnue \Leftrightarrow Nous avons une table.

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx = \sum_{i=0}^n \omega_i f(x_i)$$

ω_i : **Poids** de la quadrature.

x_i : **Points** de la quadrature

Principe :

Si les points sont fixés,
déterminer les poids. ($f(x) = P(x)$)

Remarques :

1. Se servir des bornes :

$$x_0 = -1 \text{ et } x_n = 1$$

(simplification des calculs)

2. Imposer les polynômes de base

x^j pour $j = 0$ à n .

Calculer les poids.

Exemple:

Trouver a, b et c tel que:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = a f(-1) + b f(0) + c f(1)$$

Imposer les polynômes de base
 x^j pour $j = 0$ à 2 .

$$f(x) = 1, \quad f(x) = x, \quad f(x) = x^2$$

$$f(x) = 1, \quad \int_{-1}^1 1 dx = [x]_{-1}^1 = 2 = a(1) + b(1) + c(1)$$
$$a + b + c = 2$$

$$f(x) = x, \quad \int_{-1}^1 x dx = \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{-1}^1 = 0 = a(-1) + b(0) + c(1)$$
$$-a + c = 0$$

$$f(x) = x^2, \quad \int_{-1}^1 x^2 dx = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_{-1}^1 = \frac{2}{3} = a(1) + b(0) + c(1)$$
$$a + c = \frac{2}{3}$$

Solution:

$$a = \frac{1}{3}, \quad b = \frac{4}{3}, \quad c = \frac{1}{3}$$

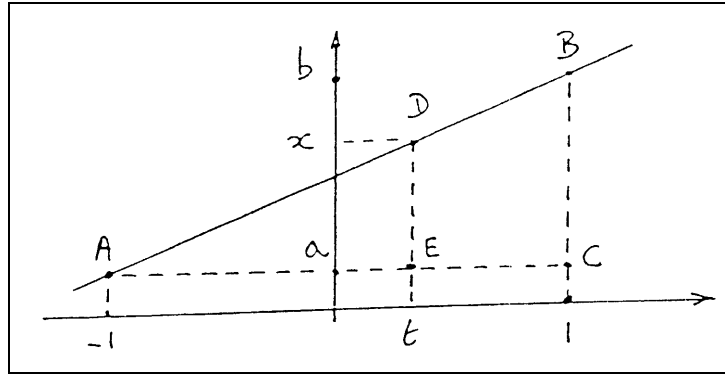
Remarque:

Si nous utilisons le résultat précédent pour calculer:

$$\int_{x_0}^{x_0+2h} f(x) dx$$

Effectuer un changement de variable : $x = x(t)$

tel que lorsque t varie de -1 à 1
 x varie de x_0 à x_0+2h .



$$\frac{x(t) - x_0}{t - (-1)} = \frac{x_0 + 2h - x_0}{1 - (-1)} \quad x = \frac{2h}{2} t + \frac{2x_0 + 2h}{2} = h t + x_0 + h$$

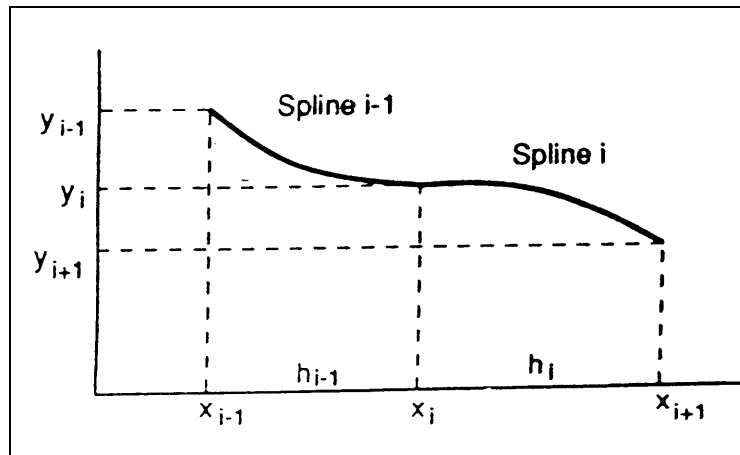
$$dx = h dt$$

$$I = \int_{x=x_0}^{x=x_0+2h} f(x) dx = \frac{b-a}{2} \int_{t=-1}^{t=1} f(x(t)) dt = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 g(t) dt$$

$$\approx \frac{2h}{2} \left\{ \frac{1}{3} g(t_1) + \frac{4}{3} g(t_2) + \frac{1}{3} g(t_3) \right\}$$

$$\approx \frac{1}{3} h \{ f(x(t_1)) + 4f(x(t_2)) + f(x(t_3)) \}$$

Dérivation des splines cubiques



Dans l'intervalle de longueur h_i ,
la spline est un polynôme

$$P_{3,i}(x) = a_i(x - x_i)^3 + b_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i) + d_i$$

ses dérivées sont :

$$P'_{3,i}(x) = 3a_i(x - x_i)^2 + 2b_i(x - x_i) + c_i$$

$$P''_{3,i}(x) = 6a_i(x - x_i) + 2b_i$$

Aux abscisses de collocations :

$$P'_{3,i}(x) = c_i$$

$$P''_{3,i}(x) = 2b_i$$

Intégration des splines cubiques

L'intégration de la spline devient :

$$\begin{aligned}\int_{x_1}^{x_{n+1}} f(x) dx &= \sum_{i=1}^n \int_{x_i}^{x_{i+1}} P_{3,i}(x) dx \\&= \sum_{i=1}^n \left[\frac{a_i}{4} (x - x_i)^4 + \frac{b_i}{3} (x - x_i)^3 + \frac{c_i}{2} (x - x_i)^2 + d_i x \right]_{x_i}^{x_{i+1}} \\&= \sum_{i=1}^n \left[\frac{a_i}{4} (x_{i+1} - x_i)^4 + \frac{b_i}{3} (x_{i+1} - x_i)^3 + \frac{c_i}{2} (x_{i+1} - x_i)^2 + d_i (x_{i+1} - x_i) \right]\end{aligned}$$

Exprimée en fonction
des pas

$$h_i = x_{i+1} - x_i$$

$$\int_{x_1}^{x_{n+1}} f(x) dx = \sum_{i=1}^n \left[\frac{a_i}{4} h_i^4 + \frac{b_i}{3} h_i^3 + \frac{c_i}{2} h_i^2 + d_i h_i \right]$$

Pour un pas constant $h_i = h$, nous avons :

$$\int_{x_1}^{x_{n+1}} f(x) dx = \frac{h^4}{4} \sum_{i=1}^n a_i + \frac{h^3}{3} \sum_{i=1}^n b_i + \frac{h^2}{2} \sum_{i=1}^n c_i + h \sum_{i=1}^n d_i$$

Intégrale impropres et indéfinies

$$I_1 = \int_0^{\infty} x e^{-x} dx \quad I_2 = \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \quad I_3 = \int_0^t x \sqrt{x^2 + 1} dx$$

- $I_1 = ?$

$$I_1 = \int_0^1 x e^{-x} dx + \int_1^{\infty} x e^{-x} dx$$

$$\text{avec } \int_1^{\infty} x e^{-x} dx = \int_1^0 \frac{1}{y} e^{-\frac{1}{y}} \left(-\frac{dy}{y^2} \right) = \int_0^1 \frac{1}{y^3} e^{-\frac{1}{y}} dy$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{1}{y^3} e^{-\frac{1}{y}} \right) = 0$$

$$I_1 = \int_0^A x e^{-x} dx \quad A \rightarrow \infty$$

A	I₁
1	0.26424
10	0.99950
100	1.00001
1000	1.00001
10000	1.00001
∞	1.0000

- $I_2 = ?$

$$I_2 = \int_B^2 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \quad B \rightarrow 0$$

- $I_3 = ?$

Intégrales multiples

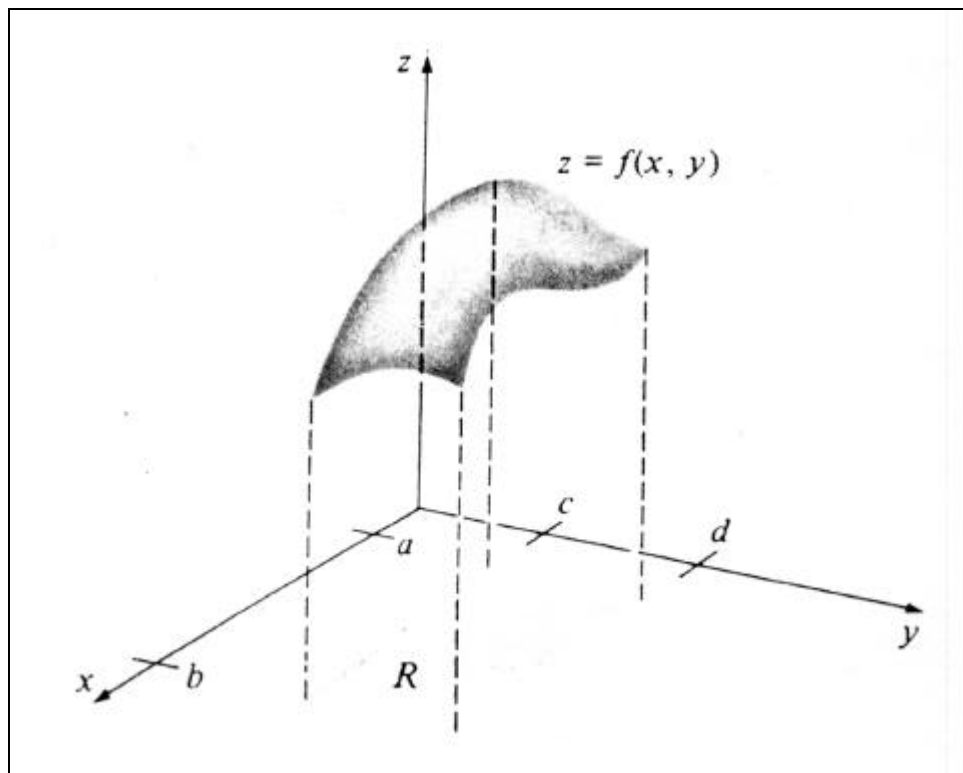
1. Les limites de l'intégration sont des constantes.

Ici nous avons :

$$\iint_A f(x, y) dA = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

Pour calculer cette intégrale, nous considérons x constant lorsque nous intégrons par rapport à y et y constant lorsque nous intégrons par rapport à x .

Nous appliquons alors la méthode que nous voulons.



Exemple :

Intégrer la fonction donné par la table suivante dans la région A déterminée par $x=1.5$, $x=3.0$ et $y=0.2$, $y=0.6$.

x\y	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
1.5	0.990	1.524	2.045	2.549	3.031
2.0	1.568	2.384	3.177	3.943	4.672
2.5	2.520	3.800	5.044	6.241	7.379
3.0	4.090	6.136	8.122	10.030	11.841

Nous allons intégrer avec la méthode des trapèzes dans la direction x et la méthode de Simpson 1/3 en y.

Commençons par y constant :

$$\begin{aligned}y = 0.2: \quad \int_{1.5}^{3.0} f(x, y) dx &= \int_{1.5}^{3.0} f(x, 0.2) dx \\&= \frac{h}{2} (f_1 + 2f_2 + 2f_3 + f_4) \\&= \frac{0.5}{2} (0.990 + 2(1.568) + 2(2.520) + 4.090) \\&= 3.3140\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y = 0.3: \quad \int_{1.5}^{3.0} f(x, 0.3) dx &= \frac{0.5}{2} (1.524 + 2(2.384) + 2(3.800) + 6.136) \\&= 5.0070\end{aligned}$$

En faisant de même, nous obtenons :

$$y = 0.4: \quad \int_{1.5}^{3.0} f(x, 0.4) dx = 6.6522$$

$$y = 0.5: \quad \int_{1.5}^{3.0} f(x, 0.5) dx = 8.2368$$

$$y = 0.6: \quad \int_{1.5}^{3.0} f(x, 0.6) dx = 9.7435$$

Intégrons maintenant en y suivant la règle de Simpson 1/3.

$$\begin{aligned} \int_{0.2}^{0.6} f(x, y) dy &= \frac{h}{3} (f_1 + 4f_2 + 4f_3 + 4f_4 + f_5) \\ &= \frac{0.1}{3} (3.3140 + 4(5.0070) + 4(6.6522) + 4(8.2368) + 9.7435) \\ &= 2.6446 \end{aligned}$$

Intégrales multiples avec limites variables

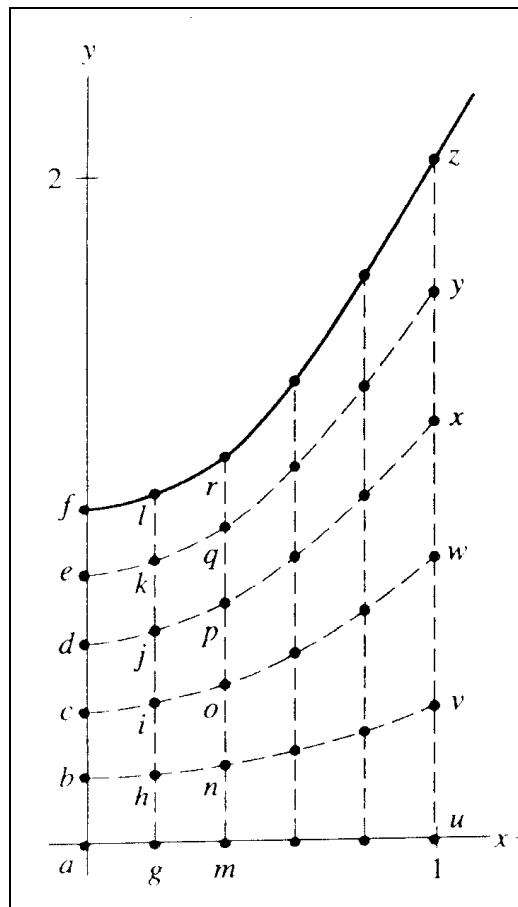
2. Les limites de l'intégration sont **variables**

Ici, nous avons par exemple :

$$\iint_A f(x, y) dA = \int_0^1 \int_0^{x^2+1} f(x, y) dy dx$$

La surface sous laquelle nous cherchons le volume n'est pas un rectangle dans le plan défini par les axes x et y.

la région considérée est :



Si nous utilisons une quadrature composite du trapèze
avec 5 sous intervalles dans chaque direction,
nous obtenons :

$$S_1 = \frac{h_1}{2}(f_a + 2f_b + 2f_c + 2f_d + 2f_e + f_f)$$

$$S_2 = \frac{h_2}{2}(f_g + 2f_h + 2f_i + 2f_j + 2f_k + f_l)$$

$$S_3 = \frac{h_3}{2}(f_m + 2f_n + 2f_o + \dots)$$

...

$$S_6 = \frac{h_6}{2}(f_u + 2f_v + 2f_w + 2f_x + 2f_y + f_z)$$

Nous avons la valeur de $\int_0^1 \int_0^{x^2+1} f(x, y) dy dx$ par :

$$I = \frac{h_x}{2}(S_1 + 2S_2 + 2S_3 + 2S_4 + 2S_5 + S_6)$$

Exemple :

Calculer $\int_0^1 \int_0^{x^2+1} f(x,y) dy dx$ avec une quadrature composite du trapèze avec 5 sous intervalles dans chaque direction :
 $f(x,y) = x y$

$$f(0,y) = 0 \quad x^2 + 1 = 1$$

$$S_1 = \frac{1.0/5}{2} (0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0) = 0$$

$$f(0.2,y) = 0.2 y$$

$$S_2 = \frac{1.04/5}{2} (0 + 0.0832 + 0.1664 + 0.2496 + 0.3328 + 0.208) \\ = 0.1082$$

$$S_3 = \frac{1.16/5}{2} (0 + 1.1856 + 0.3712 + 0.5568 + 0.7428 + 0.464) \\ = 0.2692$$

$$S_4 = 0.5549$$

$$S_5 = 1.0758$$

$$S_6 = \frac{2.0/5}{2} (0 + 0.8 + 1.6 + 2.4 + 3.2 + 2.0) = 2.0$$

$$I = \frac{0.2}{2} (0 + 0.2164 + 0.5384 + 1.1098 + 2.1516 + 2.0) = 0.6016$$

Valeur analytique : $I = 0.583333$